Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Erik Chudzik

17.11.2026

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 20:

Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Gebiet aus Abbildung 1 stückweise C^1-berandet ist.

Hinweis: Es muss kein formaler Beweis sein, die Idee dahinter reicht.

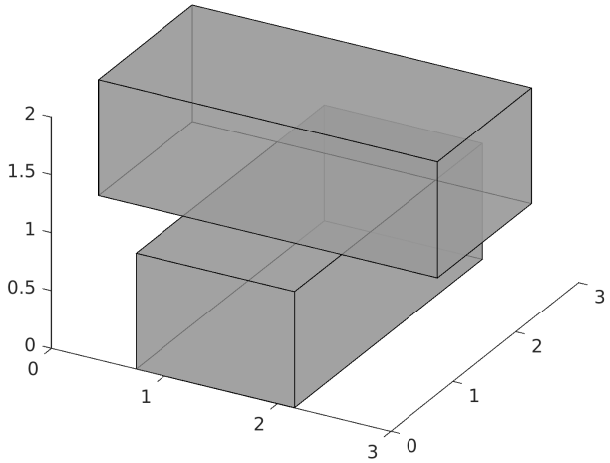


Abbildung 1: Stückweise C^1-berandetes Gebiet?

Aufgabe 21:

Nach der Vorlesung wissen wir: $u \in H^1(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ bezüglich x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$\left(\varphi, \partial_i u\right)_0 = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, u\right)_0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Weiterhin bezeichnen wir für $u \in H^1(\Omega)$ und $(v_k)_k \to u$ in $H^1(\Omega)$ mit $v_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, mit dem L^2-Limes

$$\mathrm{D}_i\, u := \lim_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} v_k$$

die *verallgemeinerten Ableitungen* von u. Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1-Gebiete Ω:

(a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ eine schwache Ableitung.

(b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen schwache Ableitungen.

Aufgabe 22:

Es sei eine Triangulierung eines beschränkten Gebietes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion u, die auf jedem Dreieck C^1 ist, gegeben. Zeigen Sie:

$$u \in H^1(\Omega) \iff u \in C(\overline{\Omega})$$

Hinweis: Aufgabe 21 (a).

Aufgabe 23:

Zeigen Sie: Für ein stw. C^1-berandetes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion g, die stetig und stw. C^1 auf Γ ist, gibt es ein $u_0 \in H^1(\Omega)$, so dass gilt

$$\gamma(u_0) = g.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 22.