Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Erik Chudzik

10.11.2026

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 16:

Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| < 1,\ x < 0 \text{ oder } 0 < y\} \subseteq \mathbb{R}^2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{C}$.

Überlegen Sie sich, dass $u(x,y) \mathrel{\widehat{=}} u(x+iy) = \mathrm{Im}(w(z)) = \mathrm{Im}(z^{2/3})$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(e^{i\varphi}) = \sin(\frac{2}{3}\varphi), & \varphi \in [0, \frac{3}{2}\pi] \\ u = 0 & \text{sonst auf } \partial\Omega \end{cases}$$

erfüllt. Zeigen Sie weiterhin, dass ∇u auf Ω nicht beschränkt ist.

Aufgabe 17:

Wir betrachten Lagrange-Finite-Elemente erster Ordnung auf dem Gebiet Ω aus Abbildung 1 mit der dort angegebenen Triangulierung. Bestimmen Sie mit Hilfe der Vorüberlegungen von Aufgabe 15 für die Differentialgleichung aus Aufgabe 15 (b) die Steifigkeitsmatrix.

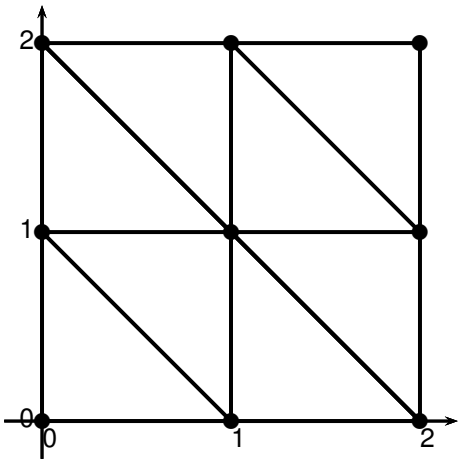


Abbildung 1: Gebiet mit Triangulierung für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix

Aufgabe 18:

(a) Zeigen Sie: Ist $\dim V < \infty$, dann gilt der Satz von Lax-Milgram auch, wenn man die Koerzivitätsbedingung durch die schwächere Voraussetzung $a(v,v) > 0$ für alle $v \neq 0$ ersetzt.

(b) Sei ℓ^2 der Raum der quadratisch summierbaren Folgen, d. h. $\ell^2 := \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \mid \|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} < \infty\}$, mit der Norm $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$a : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n y_n,$$

stetig und positiv definit, jedoch nicht ℓ^2-elliptisch ist.

Aufgabe 19:

In dieser Aufgabe werden wir mit Hilfe des Programms NETGEN in einem Jupyter-Notebook dreidimensionale Geometrien bearbeiten und erstellen. Den Link zur Installationsanleitung von NGS-Py (bzw. NETGEN/NGSOLVE) finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

(a) Lesen Sie sich das Kapitel "Constructive Solid Geometry" in der NETGEN-Dokumentation von Joachim Schöberl durch, die unter https://github.com/NGSolve/netgen/blob/master/doc/ng4.pdf zu finden ist. Sehen Sie sich außerdem die `.geo`-Beispiele unter .../netgen/tree/master/tutorials in der NETGEN-GUI und in einem Texteditor an.

Hinweis: Die `.geo`-Dateien wurden auch bei der Installation mit abgespeichert. Die Pfade, unter denen sie zu finden sind, stehen auf der NGS-Py-Seite unter "Getting started with NETGEN/NGSOLVE".

(b) Erstellen Sie nun die folgenden Geometrien, indem Sie vorhandene Beispiele ändern oder neue `.geo`-Dateien schreiben:

(a) den Quader $[-1,1] \times [0,1] \times [1.5,2]$ auf zwei verschiedene Arten, d.h als Schnitt von sechs Ebenen und direkt mit nur einem Befehl,

(b) den Würfel $[0,1]^3$ ohne den kleinere Würfel $[0.25,0.75]^2 \times [0.5,1]$ (das Beispiel `fichera.geo` ist hier hilfreich),

(c) zwei ineinander verschlungene Tori (wie zwei Glieder einer Kette),

(d) eine quadratische Pyramide mit Grundfläche $[-1,1]^2$ und Höhe 1,

(e) eine Tasse, natürlich befüllbar und mit einem Henkel.