Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Erik Chudzik

3.11.2026

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13:

(a) Bestimmen Sie für die Dreiecke aus Abbildung 1 die linearen Basisfunktionen, die jeweils auf einer Ecke den Wert 1, auf den anderen beiden den Wert 0 annehmen.

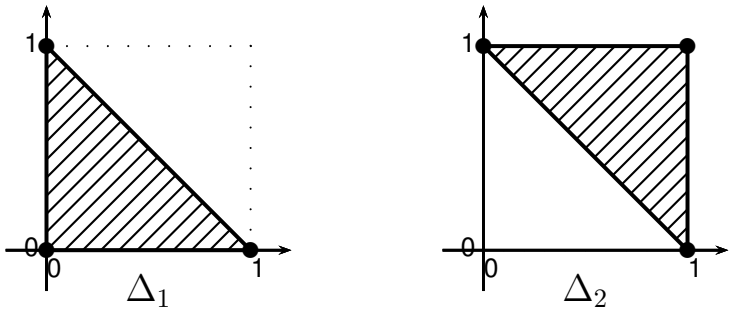


Abbildung 1: Dreiecke Δ_1 und Δ_2

(b) Bestimmen Sie für $\Omega = \Delta_1$ die (3×3)-Steifigkeitsmatrix $A = \big(a(\varphi_i, \varphi_j)\big)_{i,j}$ für die Differentialgleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Aufgabe 14:

Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung mit inhomogenen Robin-Randbedingungen

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u + u = g \quad \text{auf } \Gamma, \tag{H}$$

wobei $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\Gamma)$ vorausgesetzt sind. Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) u ist Lösung von (H).

(b) Es gilt

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) \mathrm{d}(x,y) + \int_\Gamma uv \,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}(x,y) + \int_\Gamma gv \,\mathrm{d}\sigma$$

für alle $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

(c) u ist Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2 \right] \mathrm{d}(x,y) + \frac{1}{2}\int_\Gamma v^2 \,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega fv \,\mathrm{d}(x,y) - \int_\Gamma gv \,\mathrm{d}\sigma = \min!$$

unter allen $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

Hinweis: Sie benötigen für diese Aufgabe das Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe Aufgabe 5) weiterhin mit $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, aber diesmal Testfunktionen $g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Aufgabe 15:

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) - q(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega := (a,b) \\ u(a) = u_a \quad u(b) = u_b. \end{cases} \tag{$*$}$$

(a) Implementieren Sie eine Funktion `fd02(f,q,N,a,b)`, die mittels einer zentralen Finite Differenzen Approximation der zweiten Ableitung eine approximative Lösung `u` von Gleichung $(*)$ auf einem äquidistanten Gitter mit `N` Gitterpunkten berechnet.

(b) Auf einem nicht äquidistanten Gitter mit Gitterpunkten $x_0, \dots x_N$ erhält man für $h_{-,i} = x_i - x_{i-1}$ und $h_{+,i} = x_{i+1} - x_i$ eine finite Differenzen Approximation durch

$$u''(x_i) \approx 2 \left(\frac{u(x_{i+1})}{h_{+,i}(h_{+,i} + h_{-,i})} - \frac{u(x_i)}{h_{+,i}h_{-,i}} + \frac{u(x_{i-1})}{h_{-,i}(h_{+,i} + h_{-,i})} \right).$$

Implementieren Sie eine Funktion `fd02G(f,q,x)`, so dass diese Verallgemeinerung bei der Approximation der zweiten Ableitung verwendet wird. `x` ist ein Vektor mit den Gitterpunkten.

(c) Implementieren Sie eine Funktion `fd04(f,q,N,a,b)`, die mittels des kompakten Finite Differenzen Verfahrens aus Aufgabe 11(b) eine approximative Lösung `u` von $(*)$ auf einem äquidistanten Gitter mit `N` Gitterpunkten berechnet.

`f` und `q` sind PYTHON-Funktionen zur Auswertung von f und q und `a` und `b` die Randpunkte des Intervalls Ω.

(d) Testen Sie beide Funktionen erstens an dem Beispiel aus `shooting.ipynb` und zweitens an

$$\begin{cases} -u''(x) - (1 + 4x^2)u(x) = 2\sin(x^2)\ (2\cos(x)x + \sin(x)) \quad \forall x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

dessen exakte Lösung durch $u(x) = \sin(x)\cos(x^2)$ gegeben ist und vergewissern Sie sich, dass Sie die in Aufgabe 11 berechnete Konsistenzordnung erhalten.

Hinweis: Für $u_a = 0 = u_b$ finden Sie eine Implementierung von `fd02` und `fd04` im Ordner `sose2025` auf der git Seite Vorlesung.