Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Erik Chudzik

27.10.2026

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9:

Beweisen Sie die Green'schen Formeln:

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle + v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\partial_\nu u \,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

und

$$\int_\Omega v\Delta u - u\Delta v \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\partial_\nu u - u\partial_\nu v \,\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

mit $\Gamma = \partial\Omega$, dem äußeren Normalenvektorfeld $\vec{\nu} : \Gamma \to \mathcal{S}^n$ und der äußeren Normalenableitung $\partial_\nu u = \vec{\nu} \cdot \nabla u$.

Welche Voraussetzungen benötigen Sie um den Gaußschen Integralsatz anwenden zu können?

Aufgabe 10:

Beweisen Sie das diskrete Vergleichsprinzip, Korollar 3.3, aus der Vorlesung.

Aufgabe 11:

(a) Zeigen Sie, dass die lokale Approximation des Laplace-Operators in zwei Raumdimensionen durch den 5-Punkte-Stern die Konsistenzordnung 2 hat, d.h. dass die folgende Gleichung gilt:

$$\partial_{xx}u(x,y)+\partial_{yy}u(x,y) = \frac{-4u(x,y) + u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

(b) Zeigen Sie, dass das kompakte Finite Differenzen Verfahren zur Approximation von $\partial_{xx}u(x)$

$$u(x-h) - 2u(x) + u(x+h) \approx \frac{h^2}{12}\partial_{xx}u(x-h) + \frac{5h^2}{6}\partial_{xx}u(x) + \frac{h^2}{12}\partial_{xx}u(x+h)$$

die Konsistenzordnung 4 hat.

b.w.

Aufgabe 12: (Implementierung von Kollokationsverfahren)

Implementieren Sie die auf dem letzten Übungsblatt beschriebenen Kollokationsverfahren. Dabei sollen wie dort die Kollokationsknoten $c_{1/2} = 1/2 \mp 1/6$ und damit stückweise Polynome vom Grad zwei verwendet werden.

Es soll $d = 1$ fest vorgegeben sein. Ihr Programm soll die folgende Signatur haben:

$$[\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \ldots, \lambda_{m-1,1}, \lambda_{m-1,2}] = \texttt{def koll(x, c, d, e, f, g)},$$

wobei

- `x` $= [x_1, \ldots, x_m]$ die Raumunterteilung ist,
- die rechte Seite durch $f(x, y) =$ `c`$(x)y +$ `d`(x) und
- die Randbedingung durch $r(y(a), y(b)) = ey(a) + fy(b) - g = 0$ gegeben sind.

`c` und `d` sollen dabei als Funktionshandles übergeben werden können, benutzen Sie in Ihren Programm `c(x)` bzw. `d(x)` zur Auswertung.

Schreiben Sie ein `Python` Skript `testeBeispiel`, welches die numerische Lösung von Aufgabe 8 des letzten Blattes berechnet und grafisch auf dem Intervall $[x_1, x_m]$ darstellt. Dabei müssen Sie die letzte λ-Komponente aus der Randbedingung errechnen.

Schreiben Sie ein weiteres `Python` Skript `testeBeispiel2`, welches das Randwertproblem

$$y'(x) = \sin(t)y + \cos(t), \qquad 2y(a) - y(b) = 1$$

auf dem Gitter `x` $= \{0, 1/4, 1/2, 1\}$ löst.