Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Erik Chudzik

20.10.2026

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5:

Beweisen Sie das Fundamentallemma der Variationsrechnung. Das heißt, zeigen Sie, dass für alle $f \in C(\Omega, \mathbb{R}), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit

$$\int_\Omega fg \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, g \in C(\Omega, \mathbb{R})$$

die Identität

$$f \equiv 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega$$

erfüllt ist.

Aufgabe 6: (Euler, 1779)

Sei das Variationsintegral

$$\mathcal{J}(u) := \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 dx$$

auf

$$\mathcal{V} := \left\{ u \in \mathrm{PC}^1[0,1] \mid u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

gegeben, wobei PC^1 der Raum der stetigen, stückweise stetig-differenzierbaren Funktionen ist.

(a) Raten Sie einen Minimierer u^* für $\mathcal{J}$.
Tipp: $\mathcal{J}(u^*) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Auf der kleineren Variationsklasse $\mathcal{V}^1 := \mathcal{V} \cap C^1[0,1]$ ist das Infimum des Funktionals immernoch 0, es wird allerdings von keiner C^1-Funktion angenommen.

Hinweis: Verwenden Sie in (b) Ihre Lösung aus (a), um eine Folge von stetigen Funktionen zu basteln, und denken Sie an das Newton-Schema.

Aufgabe 7:

Sei $\Omega = [0,1]^2$ und die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

gegeben. Geben Sie die Matrix A und den Vektor b, aus dem linearen Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{2}$$

an, welches aus der Finite-Differenzen-Approximation obiger Gleichung mit einem regelmäßigen Gitter mit Gitterweite $h = \frac{1}{N+1}$ hervorgeht.

b.w.

Aufgabe 8: (Kollokationsverfahren für Randwertprobleme)

Betrachte das Randwertproblem

$$y' = f(x,y) \qquad \text{auf} \qquad [a,b], \qquad\qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$
$$r(y(a), y(b)) = 0$$

Idee von Kollokationsverfahren: Suche Näherungslösungen u in einem Teilraum von $C([a,b],\mathbb{R}^d)$ und verlange, dass diese die Differentialgleichung in endlich vielen Punkten und die Randbedingung erfüllen.

Wähle eine Unterteilung von $[a,b]$ in $a = x_1 < \cdots < x_{m+1} = b$, nenne die Schrittweiten $h_j = x_{j+1} - x_j$. Wähle weiterhin *Kollokationsknoten* $c_1, \ldots, c_s \in [0,1]$ paarweise verschieden.

Kollokationsverfahren: Suche $u : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, so dass

- $u|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathcal{P}_s$, $\mathcal{P}_s$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq s$.
- $u'(x) = f(x, u(x))$ für $x = x_j + c_k h_j$, $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq s$
- $r(u(a), u(b)) = 0$

Bestimmen Sie für $d = 1$, $s = 2$, Kollokationsknoten $c_1 = 1/3$ und $c_2 = 2/3$, $m = 3$, $a = x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 7, x_4 = 10 = b$ und die rechte Seite $f(x, y(x)) = x + y(x)$ das entstehende lineare Gleichungssystem. Als Randbedingung sei $y(a) + y(b) = 1$ vorgegeben.

Hinweis: Benutzen Sie für die Darstellung der Polynome die Lagrange-Basis zu den Knoten $0, 1/2, 1$

$$u_i(\tau) = \sum_{k=0}^{s} \lambda_{i,k} l_{i,k}(\tau),$$

wobei Sie die Polynome auf das Einheitsintervall transformieren. Wieso ergeben sich Polynome zweiten Grades? Vergessen Sie bei der Aufstellung des Gleichungssystems nicht die Stetigkeit von u.