

Schriftliche Prüfung zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

(PO 2014: Erste Klausur / PO 2008: Klausur)

Bitte folgende Angaben ergänzen und **DEUTLICH LESBAR** in Druckbuchstaben schreiben:

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.: Studienfach:

Fachsemester:

Account zur Klausur: Nummer des Computers:

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

- ☐ die Zulassung im WS 2025/2026 erworben habe,
- ☐ an einer schriftlichen Prüfung zur Computergestützten Mathematik zur Analysis bei
..... im WS/SS teilgenommen, aber nicht bestanden habe,
- ☐ die Zulassung zur Prüfung im WS/SS erworben habe.

.....

Unterschrift

Hinweise: WICHTIG !

- In Ihrem Home-Verzeichnis finden Sie die Dateien `WerBinIch.txt`, sowie `Aufgabe1.ipynb`, `Aufgabe2.ipynb`, `Aufgabe3.ipynb`, `Aufgabe4.ipynb` und `Aufgabe5.ipynb`.
- Ergänzen Sie zuerst die Datei `WerBinIch.txt` mit Ihrem Namen, Vorname, usw.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, die in Dateien mit jeweils dem zur Aufgabe passenden Namen in Ihrem Home-Verzeichnis gespeichert sind. Speichern Sie daher in kurzen Abständen Ihre Lösungen, um ggf. den Verlust von Daten zu vermeiden, falls `jupyter` einmal abstürzt.
- Nach der Klausur führen wir einen Restart des Kernels durch. Achten Sie daher darauf, dass die Option `Restart & Run all` unter `Kernel` ohne Fehlermeldung durchläuft.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, bei denen der Lösungsweg klar zu erkennen ist.
- Zum Bestehen dieser Klausur sind **15** Punkte hinreichend.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	6	6	6	6	6	30
err. Punkte						

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

und vereinfachen Sie jeweils das Ergebnis.

- (b) Berechnen Sie die Hessematrix der Funktion

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \log \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

und vereinfachen Sie die Hessematrix.

- (c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 e^x \sin(x)$$

und vereinfachen Sie diese.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ((x-1)^2 + 1) e^{-(x-1)^2}.$$

- (a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung, $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, von f .
- (b) Zeichnen Sie f , $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ mit unterschiedlichen Farben über dem Intervall $[-2, 4]$ in eine Graphik und fügen Sie eine Legende hinzu.
- (c) Bestimmen Sie die Wendepunkte, $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$, von f und geben Sie sie aus. (f hat in x_j einen Wendepunkt, falls $\frac{d^2}{dx^2}f(x_j) = 0$.)
- (d) Gesucht ist eine Parabel $p: x \mapsto ax^2 + bx + c$ durch die drei Wendepunkte. Bestimmen Sie dazu a, b und c , sodass $f(x_j) = p(x_j)$ für $j = 0, 1, 2$ gilt.
- (e) Zeichnen Sie die Parabel p und die Funktion f mit unterschiedlichen Farben über dem Intervall $[-2, 4]$ in eine Graphik.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Die Parametrisierung einer Kurve in der Ebene ist gegeben durch:

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t \cos(t) \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie die Ableitung $\nu(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t)$.

- (b) Rotiert man ν um 90° durch Anwendung der Drehmatrix R , so erhält man eine Parametrisierung einer zu γ parallelen Kurve:

$$\mu : t \mapsto \gamma(t) + \frac{1}{\|\nu(t)\|_2} R \nu(t) \quad \text{für } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie jeweils für $t \in [-\pi, \pi]$ die Kurve γ in blau und die Kurve μ in rot in der Ebene.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Im Folgenden wird für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Funktion $r_n : x \mapsto r_n(x)$ definiert.

Es sind zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = x^2, \quad a_n = 2x^2(n-2)(2n-3) \quad \text{für } n > 2 \\ b_n &= -x^2 + 2(n-1)(2n-1). \end{aligned}$$

Damit werden rekursiv Folgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$p_0 = 0, \quad p_1 = x, \quad p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 1, \quad q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}$$

für $n \geq 2$ definiert. Nun setzt man $r_n = \frac{p_n}{q_n}$.

- (a) Schreiben Sie eine Pythonfunktion `pade(n)`, die für eine natürliche Zahl n eine Liste von Sympyausdrücken $[r_0, r_1, \dots, r_n]$ zurückgibt, wobei jedes r_j vereinfacht sein soll.
- (b) Zeichnen Sie für $n = 1, \dots, 5$ die r_n für $x \in [-5, 5]$ in verschiedenen Farben in ein Bild. Beschränken Sie den Wertebereich, die y -Achse, auf $[-5, 5]$.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie alle möglichen Extremalstellen (x_0^*, x_1^*) von

$$(x_0, x_1) \mapsto f(x_0, x_1) := x_0 \left(4x_0 + \sqrt{2}x_1 \right) + x_1 \left(\sqrt{2}x_0 + 5x_1 \right)$$

unter der Nebenbedingung $x_0^2 - x_1^2 = 1$, die man aus der Forderung erhält, dass die notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllt sind.

- (b) Stellen Sie die Nebenbedingung graphisch in einem Bild als rote Linie dar.
- (c) Zeichnen Sie für jede mögliche Extremalstelle die Menge $\{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_0, x_1) = f(x_0^*, x_1^*) \text{ und } -2 \leq x_0, x_1 \leq 2\}$ in das Bild aus (a) ein.