Vorname : Name:

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie, falls vorhanden, die lokalen Minima und Maxima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto (2x_2 + x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Lösung 1:

Es gilt:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2(2x_2 + x_1^3)3x_1^2 - 2(1 - x_1) \\ 2(2x_2 + x_1^3)2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 x_2 + 6x_1^5 - 2 + 2x_1 \\ 8x_2 + 4x_1^3 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $x_2 = -\frac{1}{2}x_1^3$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir

$$-6x_1^5 + 6x_1^5 - 2 + 2x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Somit ist $(1, -\frac{1}{2})$ der einzige Kandidat für lokale Extremalstellen. Wir bemerken, dass die Funktion f eine Summe zweier Quadrate ist und daher $f(x_1, x_2) \geqslant 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^2)$ gilt. Wegen $f(1, -\frac{1}{2}) = 0$ ist somit $(1, -\frac{1}{2})$ eine lokale (und auch globale) Minimalstelle mit Minimum 0.

Achtung, hier ist nur nach den Extremwerten gefragt, nicht nach Extremstellen!

Vorname :   Name:

Aufgabe 2: (4 + 2 + 2 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 - x_2)(x_1^2 - 4x_2)$$

und $x^* := (0,0)^T$.

i) Zeigen Sie, dass x^* der einzige kritische Punkt von f ist.

ii) Beweisen Sie, dass f längs jeder Ursprungsgeraden $t \mapsto tv$ ($v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$) in x^* ein striktes lokales Minimum besitzt.

iii) Prüfen Sie, ob x^* ein lokales Minimum von f ist, indem Sie f auf der Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

betrachten.

Lösung 2:

i) Es gilt $f(x) = x_1^4 - 5x_1^2 x_2 + 4x_2^2$ und somit

$$\nabla f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 4x_1^3 - 10x_1x_2 & = & 0 \\ -5x_1^2 + 8x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & x_2 = \frac{5x_1^2}{8} \\ \Rightarrow & 4x_1^3 - 10x_1(\frac{5x_1^2}{8}) = 0 \Leftrightarrow 4x_1^3 - \frac{50}{8}x_1^3 = 0 \Leftrightarrow (4 - \frac{50}{8})x_1^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow & x_2 = 0. \end{array}$$

Somit ist $x^* = (0,0)^T$ der einzige stationäre Punkt von f und es gilt $f(x^*) = 0$.

ii) Für $\varphi_v(t) := f(x^* + tv)$ (mit $v = (v_1, v_2)^T \neq 0$) folgt

$$(*) \qquad \begin{array}{rl} \varphi_v(t) & = (t^2v_1^2 - tv_2)(t^2v_1^2 - 4tv_2) \\ & = t^2(tv_1^2 - v_2)(tv_1^2 - 4v_2) \\ & > 0 \text{ für } t \neq 0 \text{ klein genug.} \end{array}$$

(Denn: Ist $v_2 = 0 (\Rightarrow v_1 \neq 0)$, dann ist die Aussage $(*)$ klar. Für $v_2 \neq 0$ folgt $-v_2(-4v_2) > 0$ und somit auch $(\xi - v_2)(\xi - 4v_2) > 0$ für kleine Störungen ξ.)

iii) [Es gilt

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 10x_2 & -10x_1 \\ -10x_1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Damit hilft die Hessematrix hier nicht weiter. Man sollte als das tun was gefordert wird.]

Betrachte den Pfad $\{(a, a^2/2) \mid a \in \mathbb{R}\}$: Es gilt

$$f\left(\left(a, \frac{a^2}{2}\right)^T\right) = \left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(a^2 - 4\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2(-a^2) = -\frac{a^4}{2} < 0 \ \forall a \neq 0.$$

Damit ist x^* kein lokales Minimum von f.

Vorname : Name:

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 3x_1x_2$$

auf der Kreisscheibe

$$K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Lösung 3:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix},$$
$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Setzt man den Gradienten 0, so erhält aus der zweiten Gleichung $x_1 = 0$ und eingesetzt in die erste Gleichung $x_2 = 0$. Der einzige kritische Punkt ist damit $(0, 0)$.

Die Determinate der Hessematrix ist negativ. In zwei Dimensionen ist daher die Hessematrix indefinit. Alternative: Die Eigenwerte der Hessematrix sind -1 und 9, die Hessematrix ist also indefinit.

Es liegt an der Stelle $(0, 0)$ daher weder ein Minimum, noch ein Maximum vor, sondern ein Sattelpunkt.

Minimal- und Maximalstellen können daher nur am Rand der Menge K liegen.

Wir definieren $g(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 1$ und stelllen fest, dass $K = \{(x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) \leq 0\}$ gilt. Der Kreisrand wird somit durch die Bedingung $g(x_1, x_2) = 0$ beschrieben. Wegen

$$\nabla g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

folgt $\nabla g(x_1, x_2) \neq 0 \ \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

Alle (lokalen) Minima/Maxima $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ von f auf dem Kreisrand erfüllen die folgende Bedingung:

Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ gilt.

Wir müssen also

$$\nabla f(x_1, x_2) + \lambda \nabla g(x_1, x_2) = 0$$

und somit das System

$$\begin{aligned} 8x_1 - 3x_2 + 2\lambda x_1 &= 0 \\ -3x_1 + 2\lambda x_2 &= 0. \end{aligned}$$

lösen. Aus der zweiten Zeile ergibt sich

$$x_1 = \lambda \frac{2}{3} x_2, \tag{1}$$

eingesetzt in die erste Zeile weiterhin

$$x_2(\frac{4}{3}\lambda^2 + \frac{16}{3}\lambda - 3) = 0,$$

was entweder durch

$$x_2 = 0$$

oder mit einem λ, das

$$\frac{4}{3}\lambda^2 + \frac{16}{3}\lambda - 3 = 0$$

erfüllt, gelöst wird. Für $x_2 = 0$ ergibt sich automatisch $x_1 = 0$, was nicht auf dem Kreisrand liegt und daher ausscheidet.

Die Lösungen der quadratischen Gleichung für λ sind $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = -\frac{9}{2}$.

Für $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ergibt Gleichung (1) gerade $x = \frac{1}{3}y$. Weiterhin liefert $g(x_1, x_2) = 0$: $x_2 = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$ und damit $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Für $\lambda_2 = -\frac{9}{2}$ ergibt Gleichung (1) $x_1 = -3x_2$. Weiterhin liefert $g(x_1, x_2) = 0$: $x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ und damit $x_1 = \mp\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Es gilt

$$f(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}) = -\frac{1}{2} < \frac{9}{2} = f(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}) = f(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}).$$

Damit sind

$$(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}), (-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$$

die Minimalstellen und

$$(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$$

die Maximalstellen von f auf K.

Vorname : Name:

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Es ist

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

eine Kurve.

Berechnen Sie die Bogenlänge dieser Kurve.

Hinweis: Sie können verwenden, dass $1 - \cos(t) = 2\sin(\frac{t}{2})^2$ und $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$.

Lösung 4: Es gilt:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} ||\gamma'(t)||_2 dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos(t)^2 + \sin(t)^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)} dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos(t)} \frac{\sqrt{1+\cos(t)}}{\sqrt{1+\cos(t)}} dt + \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)} \frac{\sqrt{1+\cos(t)}}{\sqrt{1+\cos(t)}} dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-\cos(t)^2}}{\sqrt{1+\cos(t)}} dt + \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sqrt{1-\cos(t)^2}}{\sqrt{1+\cos(t)}} dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{1+\cos(t)}} dt + \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{1+\cos(t)}} dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+\cos(t)}} dt - \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+\cos(t)}} dt
\end{aligned}$$

Wir substituieren $z := 1 + \cos(t)$. Dann gilt $z' = \frac{dz}{dt} = -\sin(t)$ und somit:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} ||\gamma'(t)||_2 dt &= \sqrt{2}\int_2^0 \frac{-z'}{\sqrt{z}} \frac{1}{z'} dz - \sqrt{2}\int_0^2 \frac{-z'}{\sqrt{z}} \frac{1}{z'} dz = -\sqrt{2}\int_2^0 z^{-\frac{1}{2}} dz + \sqrt{2}\int_0^2 z^{-\frac{1}{2}} dz \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^2 z^{-\frac{1}{2}} dz = 4\sqrt{2}[\sqrt{z}]_0^2 = 8
\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg zur Integralberechnung nach Zeile 2:

Unter Nutzung des Additionstheorems $\cos(t) = \cos(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}) = \cos(\frac{t}{2})^2 - \sin(\frac{t}{2})^2$ und $1 = \sin(\frac{t}{2})^2 + \cos(\frac{t}{2})^2$ schreiben wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)} dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(\frac{t}{2})^2 + \sin(\frac{t}{2})^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin(\frac{t}{2})^2} dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin(\frac{t}{2}) dt = 2\sqrt{2}[-\cos(\frac{t}{2})]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Vorname : Name:

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x < y^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in $(0,0)$ auf

(a) Stetigkeit,

(b) partielle Differenzierbarkeit und

(c) totale Differenzierbarkeit.

Lösung 5:

Zu (a): Die Funktion ist nicht stetig (in $(0,0)$), denn es gilt

$$\lim_{h\to 0} f(h,h) = 0 \neq 1 = \lim_{h\to 0, h>0} f(\frac{h^2}{2}, h).$$

Zu (b): Die Funktion ist partiell differenzierbar in $(0,0)$, denn es gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \quad \text{sowie}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Zu (c): Die Funktion ist nicht total differenzierbar (in $(0,0)$), denn es gilt:

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(\frac{h^2}{2}, h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{1}{h} = \infty.$$

Vorname :   Name:

Aufgabe 6: (3 + 2 Punkte)

Sei

$$f(x,y) = \cos(x) + \mathrm{e}^x y + \sin(y^2) - 1$$

(a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung der Null die Gleichung $f(x,y) = 0$ eindeutig durch eine Funktion g, mit $y = g(x)$ aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie $g'(0)$.

Lösung 6:

Zu (a): Wir nutzen den Satz über implizite Funktionen. Zur Überprüfung der Bedingungen bemerken wir:

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar mit $f(0,0) = 0$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad e^x + 2y\cos(y^2),$$

also $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$.

Somit existiert laut Satz über implizite Funktionen eine offene Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}$ mit einer C^1-Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ und $f(x, g(x)) = 0$, $g(0) = 0$.

Zu (b): Laut Satz über implizite Funktionen (dessen Bedingungen in (a) bereits geprüft wurden) gilt:

$$g'(x) \quad = \quad -[\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))]^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$

Unter Verwendung der Rechnungen aus (a) sowie $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x) + e^x y$ folgt:

$$g'(0) \quad = \quad -1 \cdot 0 \quad = \quad 0.$$

Vorname : Name:

Aufgabe 7: (3 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y^{\frac{2}{3}}(t) \quad \text{für } t > 0,$$
$$y(0) = 0.$$

Begründen Sie, ob die Lösung eindeutig ist oder nicht.

Lösung 7:

Wir berechnen:

$$\frac{dy}{dt} = y^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int 1 dt \quad \Rightarrow \quad 3y^{\frac{1}{3}} = t + C \ (C \in \mathbb{R})$$

Es folgt

$$y = (\frac{t+C}{3})^3,$$

also durch Einsetzen von $y(0) = 0$

$$y = \frac{t^3}{27}.$$

Die gefundene Lösung ist nicht eindeutig, da die konstante Funktion $y = 0$ ebenfalls eine Lösung ist. Es gibt sogar beliebig viele Lösungen

(Da $y \mapsto y^{\frac{2}{3}}$ in 0 nicht Lipschitzstetig ist, ist der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar!
)

Vorname : Name:

Aufgabe 8: (3 Punkte)

Sei für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \lambda y.$$

(a) Zeigen Sie, dass es für $\lambda > 0$ und jede nichttriviale Lösung der Differentialgleichung (d.h. $y \neq 0$) genau ein $T > 0$ gibt, so dass $y(t + T) = 2y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Berechnen Sie $T(\lambda)$.

Lösung 8:

Wir kennen die nichttrivialen Lösung der Differentalgleichung aus der Vorlesung als $y(x) = Ce^{\lambda x}$ ($C \in \mathbb{R}_{>0}$).

Es gilt:

$$y(t+T) = 2y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Ce^{\lambda t + \lambda T} = 2Ce^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda T} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Vorname : Name:

Aufgabe 9: (8 Punkte)

Ordnen Sie den folgenden Modellen jeweils, soweit möglich, eine Differentialgleichung oder ein System von Differentialgleichungen zu, mit dem das Modell qualitativ beschrieben werden kann.

a, b, c, d sind positive Konstanten. x, y, z sind Funktionen, die von t, der Zeit, abhängen und je nach Modell sind x, y, z oder x, y oder auch nur x gesucht.

Begründen Sie jeweils, ob und wenn ja warum eine der Differentialgleichungen geeignet ist, eines der Modelle zu beschreiben.

A Raupenspinner (Populationgröße x) befallen im Frühjahr einen Baum und vermehren sich mit einer gewissen Geburtenrate, bis der ganze Baum besetzt ist. Stare, eine Vogelart, fressen Raupenspinner. Sind nur wenige Raupenspinner in einem Baum, so fressen die Staare nur wenige Raupen und suchen sich andere ergiebigere Futterquellen. Sind viele Raupenspinner in einem Baum, so ist der Baum als Nahrungquelle sehr attraktiv und die Staare fressen soviele Raupenspinner wie sie können.

B Silberionen (Konzentration x) reagieren mit einer gewissen Rate mit Chloridionen (Konzentration y) zu Silberchlorid (Konzentration z). Diese Reaktion ist umkehrbar. Bei der Umkehrreaktion löst sich Silberchlorid mit einer gewissen Rate wieder auf.

C Blattläuse (Populationgröße x) vermehren sich mit einer gewissen Geburtenrate. Es soll angenommen werden, dass ihr Lebensraum beliebig groß ist. Schwebfliegen (Populationgröße y) ernähren sich ausschließlich von Blattläusen. Ihre Geburtenrate ist daher proportional zu den vorhandenen Blattläusen. Gleichzeitig sterben Schwebfliegen mit einer konstanten Sterberate.

D Rotalgen (Populationgröße x) vermehren sich mit einer gewissen Reproduktionsrate. Sind zusätzlich Blaualgen (Populationgröße y) vorhanden, so vergrößert sich die Reproduktionsrate der Rotalgen. Die Reproduktionsrate der Blaualgen wird von den Rotalgen nicht beeinflußt. Es wird zur Vereinfachung jeweils angenommen, dass ihr Lebensraum unbegrenzt ist.

(1) $x' = ax + bxy, \quad y' = dyx$

(2) $x' = ax - bxy, \quad y' = -cx + dy$

(3) $x' = ax - bxy, \quad y' = -cy + dxy$

(4) $x' = ax + bxy, \quad y' = dy$

(5) $x' = a(b-x)x - \dfrac{cx^2}{x^2+d}$

(6) $x' = a(b-x)x - \dfrac{c}{x^2+d}$

(7) $x' = -\left(a + \dfrac{x^2}{x^2+d}\right)xy$

Lösung 9:

A gehört zu (5), denn:

Für $x = 0$ sollte $x' = 0$ gelten (Raupen entstehen nicht aus dem Nichts). Damit fällt (6) weg. Die Ableitung x' sollte für $y = 0$ und größer werdende x erst positiv und irgendwann 0 werden (irgendwann ist der Baum voll). Das schließt die Möglichkeiten (2),(3),(4),(1) aus.

Die Möglichkeit (5) erfüllt alle beschriebenen Eigenschaften. $a(b-x)x$ ist der Term aus der logistischen Wachstumsgleichung. Die Wirkung der Stare wird durch den zweiten Term beschrieben, der Null ist wenn x Null ist und von unten gegen einen festen Wert konvergiert, wenn x ansteigt.

B hat keine Zuordnung, denn:

Sowohl x' als auch y' sollten von x und y abhängen, denn man braucht beide Ausgangsstoffe für die Reaktion. Das schließt (6),(4),(5) aus. Die beiden Gleichungen für x' und y' sollten zudem bis auf Skalare symmetrisch sein. Das schließt auch alle anderen Differentialgleichungen aus.

Es gibt keine Gleichung die, die Änderung von z beschreibt.

C gehört zu (3), denn:

Das ist das Volterra Lotka Model der Vorlesung. a ist die Geburtenrate der Blattläuse, c die Sterberate der Schwebfliegen. Die Geburtenrate der Schwebfliegen ist proportional zu Populationsgröße der Blattläuse. Und viele Schwebfliegen fressen proportional mehr Blattläuse

D gehört zu (4), denn:

Das Wachstum y' der Blaualgen hängt nicht von x ab. Damit fallen (2),(3) und (1) weg. Die Population der Rotalgen unterliegt keinen negativen Einflüssen und ist nicht beschränkt. Das schließt (6) und (5) aus. Die Gleichung (4) erfüllt alle beschriebenen Eigenschaften.