Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Carsten Feldkamp

03.03.2021

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Schriftliche Prüfung zur Analysis 2

Bitte folgende Angaben ergänzen und **DEUTLICH LESBAR** in Druckbuchstaben schreiben:

Name: .... Vorname: ....

Matrikel-Nr.: .... Studienfach: ....

Fachsemester: ....

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im WiSe 2020/21 erworben habe,
☐ an einer schriftlichen Prüfung zur Analysis 2 bei
.... im WS/SS .... teilgenommen, aber nicht bestanden habe,
☐ die Zulassung zur Prüfung im WS/SS .... erworben habe.

....
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
max. Punkte	5	6	3	5	4	4	5	3	6	12	53
err. Punkte											

Hinweise: WICHTIG !

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen, schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller und nicht in rot.
- Wird in der Aufgabenstellung ein Beweis oder eine Begründung verlangt, so muss die Argumentation oder der Rechenweg nachvollziehbar sein.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch und überlegen Sie sich, mit welcher Aufgabe Sie beginnen wollen.
- Nehmen Sie sich Zeit für die Beantwortung der Wahr/Falsch Fragen. Für jede richtige Antwort in diesem Fragenteil gibt es einen Punkt.
- Vergessen Sie keine Aufgabe. Es sind insgesamt 10 Aufgaben.
- Viel Erfolg!

Vorname : Name:

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimmen Sie, falls vorhanden, die lokalen Minima und Maxima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x_1, x_2) \mapsto 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Lösung 1:

Es ist

$$\nabla f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} -400x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1) & = & 0, \\ 200(x_2 - x_1^2) & = & 0. \end{array}$$

Die zweite Gleichung liefert $x_2 = x_1^2$. Eingesetzt in die erste Gleichung erhält man sofort $x_1 = 1$ und somit auch $x_2 = 1$. Folglich ist $x^* := (1,1)^T$ der einzige stationäre Punkt von f und der einzige Kandidat für eine Extremstelle.

Um zu begründen, dass es sich bei x^* um ein lokales Minimum handelt, sind mehrere Methoden geeignet.

Methode 1:

Wegen $f(x^*) = 0$ und

$$f(x) > 0 = f(x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x^*\}$$

ist x^* die Stelle des strikten globale Minimums $f(x^*) = 0$ von f.

Methode 2:

Für die Hessematrix zu f gilt

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -400x_2 + 1200x_1^2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$H_f(x^*) = H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}.$$

Dass in x^* ein lokales Minimum vorliegt, folgt nun entweder durch Betrachtung der Hauptminoren $\Delta_1 = 802 > 0$ und $\Delta_2 = \det(H_f(1,1)) > 0$ oder alternativ durch Berechnung/Abschätzung der beiden positiven Eigenwerte ($\lambda_{1/2} = 501 \pm \sqrt{250601}$).

Somit ist $f(x^*) = 0$ ein lokales Minimum von f.

Vorname : Name:

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Wie muss der Parameter c gewählt werden, damit die Fläche

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = \tfrac{5}{2}x^2 - 3xy + \tfrac{5}{2}y^2 + 16x - 48y + c\}$$

die xy-Ebene berührt, aber nicht schneidet?

Erläuterung:

Setzt man $\mathcal{M}_c := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = \frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2 + 16x - 48y + c\}$, so ist ein Paramter c gesucht, so, dass ein Element $(x^*, y^*, z^*) \in \mathcal{M}_c$ mit $z^* = 0$, jedoch kein Paar $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \mathcal{M}_c \times \mathcal{M}_c$ mit $z_1 > 0$ und $z_2 < 0$ existiert.

Lösung 2:

Wir untersuchen $f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2 + 16x - 48y$ auf lokale Extrema.

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} 5x - 3y + 16 \\ -3x + 5y - 48 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; y = \frac{16+5x}{3} \\
&\Rightarrow\; -3x + \frac{5}{3}(16+5x) - 48 = 0 \;\Rightarrow\; -9x + 80 + 25x - 144 = 0 \\
&\Rightarrow\; 16x = 64 \;\Rightarrow\; x = 4 \;\Rightarrow\; y = 12
\end{aligned}$$

Es kann also höchstens ein lokales Extremum in $(4,12)$ geben.

Wegen

$$H_f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \det(\Delta_1) = 5 > 0,\; \det(\Delta_2) > 0$$

ist $(4,12)$ eine lokale Minimalstelle.

(Alternativ kann man die beiden positiven Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$ von $H_f(4,12)$ berechnen.)

Als Minimum berechnen wir: $f(4,12) = 40 - 144 + 360 + 64 - 576 = -256$

Es reicht auch die Determinate der Hessematrix zu betrachten, da falls diese im zweidimensionalen Fall positiv ist, ein Sattelpunkt ausgeschlossen werden kann.

Somit erfüllt $c := 256$ die gewünschte Eigenschaft mit $z > 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathcal{M}_c \backslash \{(4,12,0)\}$.

Vorname : Name:

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Differenzieren Sie die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : x \mapsto \int_0^x \cos(3x-t)\sin(t)dt.$$

Lösung 3:

1. Variante

Unter Benutzung des Additionstheorems $\cos(3x-t) = \cos(3x)\cos(t) + \sin(3x)\sin(t)$ erhält man für die zu differenzierende Funktion

$$\int_0^x \cos(3x-t)\sin(t)dt = \cos(3x)\int_0^x \cos(t)\sin(t)dt + \sin(3x)\int_0^x \sin(t)^2 dt.$$

Die Produktregel liefert dann

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(3x-t)\sin(t)dt \\
&= \cos(3x)\cos(x)\sin(x) - 3\sin(3x)\int_0^x \cos(t)\sin(t)dt + \sin(3x)\sin(x)^2 + 3\cos(3x)\int_0^x \sin(t)^2 dt
\end{aligned}$$

und man ist fertig.

Man kann auch noch die Integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin(t)^2\ dt &= [-\cos(t)\sin(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)^2\ dt = -\cos(x)\sin(x) + \int_0^x 1\ dt - \int_0^x \sin(t)^2\ dt \\
\Rightarrow \int_0^x \sin(t)^2\ dt &= \frac{1}{2}(x - \cos(x)\sin(x))
\end{aligned}$$

und

$$\int_0^x \cos(t)\sin(t)\ dt = \frac{1}{2}(\sin(x)^2 - \sin(0)^2) = \frac{1}{2}\sin(x)^2.$$

ausrechnen, einsetzen und das Resultat vereinfachen.

2. Variante

Da der Integrand beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(3x-t)\sin(t)dt = \underbrace{\cos(3x-x)\sin(x)}_{\substack{\text{Ableitung nach der}\\ \text{oberen Integralgrenze}}} + \int_0^x \underbrace{-3\sin(3x-t)}_{\substack{\text{Ableitung des}\\ \text{Integranden nach } x}} \sin(t)dt.$$

Das kann man sich mit Hilfe des Limes des Differenzenquotienten klarmachen. Hierbei verwendet man, dass man Differentiation und Integration vertauschen darf.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(3x-t)\sin(t)dt \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_0^{x+h}\cos(3(x+h)-t)\sin(t)dt - \int_0^x \cos(3x-t)\sin(t)dt\right) \\
&= \int_0^x \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\cos(3(x+h)-t) - \cos(3x-t))\sin(t)dt + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\cos(3(x+h)-t)\sin(t)dt \\
&= \int_0^x -3\sin(3x-t)\sin(t)dt + \cos(3x-x)\sin(x) = \int_0^x -3\sin(3x-t)\sin(t)dt + \cos(2x)\sin(x)
\end{aligned}$$

(Das ist ein Spezialfall von

$$\frac{d}{dx}\int_0^x G(x,t)dt = G(x,x) + \int_0^x \partial_1 G(x,t)dt$$

für hinreichend oft differenzierbare G.)

Vorname : Name:

Aufgabe 4: (1 + 4 Punkte)

Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist $x \in \mathbb{R}$ so, dass $\frac{x-a}{b} = (f(x) + f(a))$ gilt.

(a) Geben Sie eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, für die x ein Fixpunkt von F ist.

(b) Finden Sie Bedingungen an a und b, so dass die durch $x_{n+1} = F(x_n)$ und $x_0 = a$ gegebene Folge $(x_n)_n$ gegen x konvergiert.

Lösung 4:

Zu (a): Isoliert man x in der Gleichung, so sieht man, dass x ein Fixpunkt von $F(t) := a+b(f(t)+f(a))$ ist.

Zu (b): Laut Banachschen Fixpunktsatz reicht es, wenn F eine Kontraktion ist.

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} |F(s) - F(t)| &= |a + b(f(s) + f(a)) - a - b(f(t) + f(a))| = |b||f(s) - f(t)| \\ &\leqslant |b| \cdot \sup_{r\in\mathbb{R}} |f'(r)| \cdot |s - t| \end{aligned}$$

Somit lautet eine hinreichende Bedingung $|b| \cdot \sup_{r\in\mathbb{R}} |f'(r)| \cdot |s - t| \in [0, 1)$.

(Man kann auch zeigen, dass falls $\sup_{r\in\mathbb{R}} |f'(r)|$ nicht beschränkt ist, wenigstens in einer Umgebung von a F eine Kontraktion ist.)

Vorname : Name:

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Geben Sie eine genaue Formulierung des Banachschen Fixpunktsatzes an.

Lösung 5:

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $f\colon X \to X$ kontrahierend. Dann existiert genau ein Fixpunkt $z \in X$ von f.

Genauer: Für $x_0 \in X$ sei $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $(x_n)_n$ gegen z mit $f(z) = z$.

Die Abschätzung für die Konvergenz ist hier nicht verlangt. Statt einem metrischen Raum kann man auch einen normierten Raum nehmen. Ist f nur auf einer Teilmenge von X kontrahierend, so muss noch gefordert werden, dass diese Teilmenge abgeschlossen ist und das Bild von f in dieser Teilmenge liegt.

Vorname : Name:

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für eine partiell differenzierbare aber nicht total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an.

Begründen Sie, warum Ihr Beispiel die gewünschte Eigenschaft hat.

Lösung 6: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Nur der Punkt $(0,0)$ muss untersucht werden, überall sonst ist f differenzierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) &= \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \overset{Symmetrie}{\Rightarrow} \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) &= \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x \to 0, y=0} \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 = \lim_{y \to 0, x=0} \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ist f partiell differenzierbar.

Jedoch gilt z. B. für $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{2}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{8(\frac{2}{n})^3 - 2(\frac{1}{n})^3}{25(\frac{1}{n})^4} = \lim_{n \to \infty} \frac{6}{25} n = \infty.$$

Also ist f nicht total differenzierbar.

Vorname : Name:

Aufgabe 7: (5 Punkte)

Gegeben ist das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= (y_1^2 + y_2^2) y_2 \\ y_2' &= -(y_1^2 + y_2^2) y_1 \end{aligned}$$

mit Anfangswert $y_1(0) = a$, $y_2(0) = b$.

Beweisen oder widerlegen Sie, dass durch $t \mapsto \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ für

$$y_1(t) = \cos((a^2+b^2)t)a + \sin((a^2+b^2)t)b \quad \text{und} \quad y_2(t) = \cos((a^2+b^2)t)b - \sin((a^2+b^2)t)a$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist.

(Sollten Sie der Meinung sein, dass das eine Lösung ist, vergessen Sie nicht auch noch die Eindeutigkeit zu beweisen.)

Lösung 7:

Unter Benutzung der binomischen Formeln rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} & y_1(t)^2 + y_2(t)^2 \\ = \; & \cos((a^2+b^2)t)^2 a^2 + 2\cos((a^2+b^2)t)a \sin((a^2+b^2)t)b + \sin((a^2+b^2)t)^2 b^2 + \\ & \cos((a^2+b^2)t)^2 b^2 - 2\cos((a^2+b^2)t)b \sin((a^2+b^2)t)a + \sin((a^2+b^2)t)^2 a^2 \\ = \; & a^2 \cos((a^2+b^2)t)^2 + b^2 \sin((a^2+b^2)t)^2 + b^2 \cos((a^2+b^2)t)^2 + a^2 \sin((a^2+b^2)t)^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= (a^2+b^2) \underbrace{(\cos((a^2+b^2)t)b - \sin((a^2+b^2)t)a)}_{y_2(t)} \\ y_2'(t) &= (a^2+b^2) \underbrace{(-\cos((a^2+b^2)t)a - \sin((a^2+b^2)t)b)}_{=-y_1(t)} \end{aligned}$$

Um die lokale Eindeutigkeit zu zeigen, ist es laut dem Satz von Picard-Lindelöf (lokale Version) ausreichend, die lokale Lipschitzstetigkeit bzgl. (y_1, y_2) zu zeigen. Diese folgt direkt aus der totalen Differenzierbarkeit der rechten Seite des Anfangswertproblems bzgl. (y_1, y_2).

Vorname : Name:

Aufgabe 8: (3 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für ein Anfangswertproblem an, dessen Lösung nicht auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.

Begründen Sie, warum Ihr Beispiel die gewünschte Eigenschaft hat.

Lösung 8:

Wir betrachten $y' = y^2$ mit $y(0) = 1$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dt} = y^2 \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{1}{y^2}\, dy \;=\; t + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow \quad & -\frac{1}{y} \;=\; t + c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{t+c} \quad \underset{y(0)=1}{\Rightarrow} \quad c = -1 \end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{t \to 1, t > 1} y(t) \;=\; \lim\limits_{t \to 1, t > 1} \frac{-1}{t-1} \;=\; -\infty$ ist diese Lösung auf $(1, \infty)$ nicht auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar.

Vorname : Name:

Aufgabe 9: (6 Punkte)

Ordnen Sie **soweit möglich** den gezeigten Graphiken **A** bis **F** die passende autonome Differentialgleichung $y' = f(y)$ (1)-(6) zu und begründen Sie kurz die Zuordnung.

In den Graphiken ist zum einen das Vektorfeld f als graue Pfeile und zu neun Startwerten • ein Teil des Orbits als gestrichelte Linie skizziert.

(1) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2y_1 - y_2 \\ -y_1 - 3y_2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2y_1 + y_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ -y_1 + 3y_2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -y_1^2 \\ 2y_1 - y_2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2y_2 \\ -2y_1 - y_2^3 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} \frac{4y_2}{y_1^2+y_2^2+1} \\ -2y_1 - 2y_2 - 1 \end{pmatrix}$

Lösung 9:

Zuordnungen:

(1) gehört zu D, denn für negative y_1, y_2 sind beide Komponenten der Vektoren positiv, für positive y_1, y_2 sind beide Komponenten der Vektoren negativ usw.

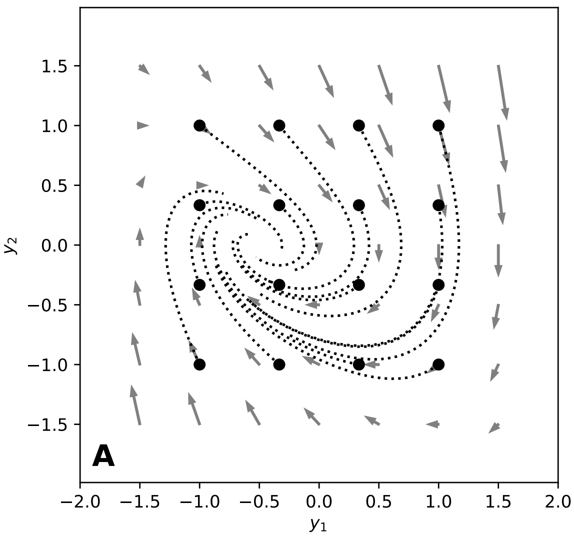
(2) ist nicht abgebildet, denn für $y_2 = 0$ und $y_1 < 0$ zeigen die Vektoren entlang der y_1-Achse zum Ursprung.

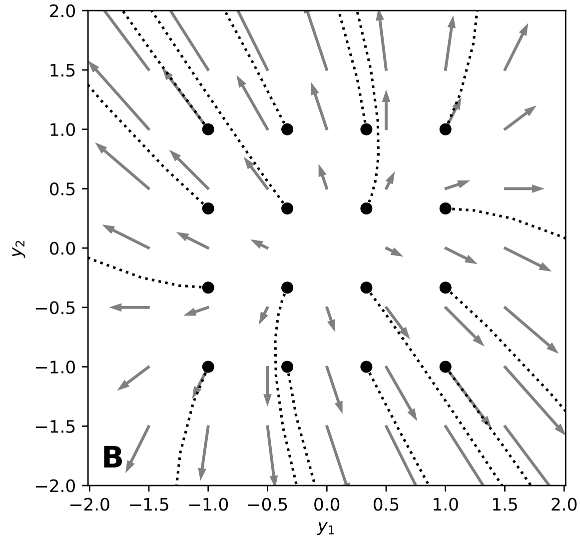
(3) gehört zu B, denn Diffenrentialgleichung (3) ist bis auf Skalierung symmetrisch bzgl. Vertauschung von y_1 und y_2. Auch die Pfeilrichtungen für $y_1, y_2 \in \{\pm 1\}$ passen.

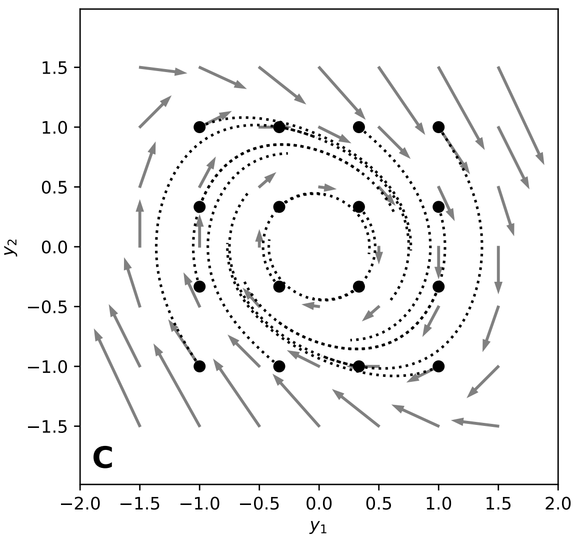
(4) ist nicht abgebildet, denn für $y_1 = 0$ zeigen die Vektoren senkrecht auf $(0, 0)$. Damit bleibt höchstens F, welches jedoch wegfällt, da die erste Komponente immer 0 oder negativ ist.

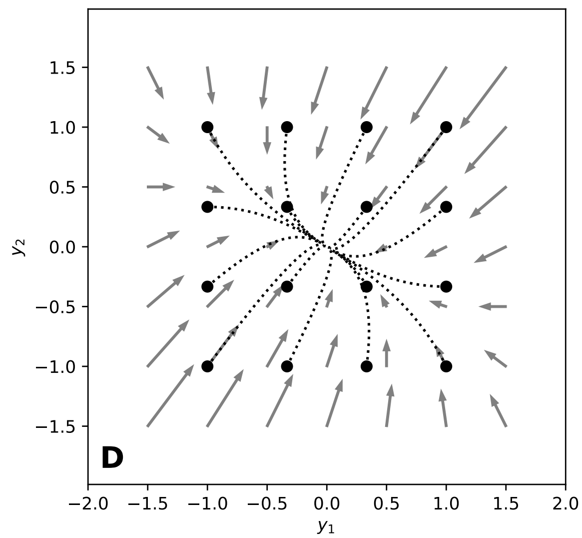
(5) gehört zu C, denn für $y_2 = 0$ und $y_1 < 0$ zeigen die Vektoren im rechten Winkel von der y_1-Achse nach oben. Auch die Pfeilrichtungen für $y_1, y_2 \in \{\pm 1\}$ passen.

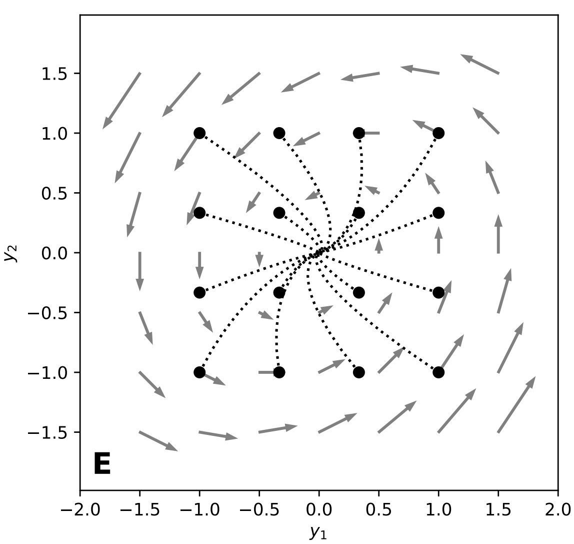
(6) gehört zu A, der einzigen Abbildung, in der $(0, 0)$ kein Gleichgewichtspunkt ist. Auch die Pfeilrichtungen für $y_1, y_2 \in \{\pm 1\}$ passen.

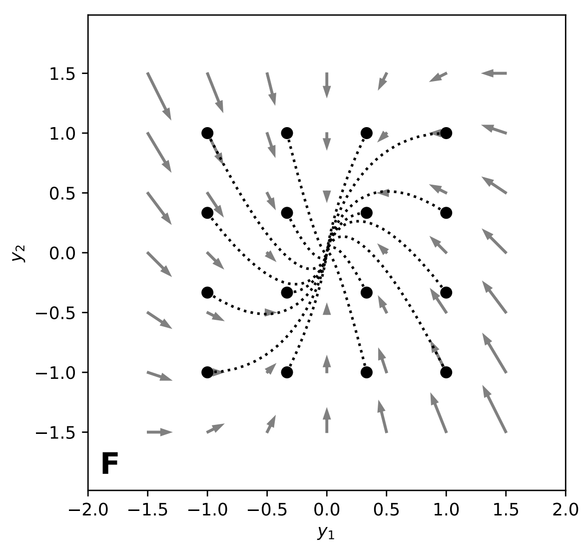












Aufagabe 10 auf Rückseite!

Vorname :   Name:

Aufgabe 10: (12 Punkte)

Im Folgenden ist (X, d) ein metrischer Raum. Für $A \subseteq X$ ist $A^C := \{x \in X \;:\; x \notin A\}$ das Komplement von A. Mit $\bar{A}$ wird die Menge der Berührpunkte von A bezeichnet.

[wahr | falsch]

Fragenblock:

1. Sind $A, B \subseteq X$ offene Mengen, so ist $A \cap B^C$ ebenfalls offen. [|]
2. Ist $f : X \to X$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt, so ist das Bild von K unter f, $f(K)$, abgeschlossen. [|]
3. Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $\bar{A} = A$. [|]
4. Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt. [|]
5. $f : X \to X$ ist stetig in $a \in X$ genau dann, wenn für eine Folge $(x_n)_n$, die gegen a konvergiert, gilt, dass auch die Folge $(f(x_n))_n$ gegen $f(a)$ konvergiert. [|]
6. Durch $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert. [|]
7. Durch $\|x\| = \sqrt{|x_1 x_2 x_3|}$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^3$ definiert. [|]

Im Folgenden ist $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R}^n$ ist mit der euklidischen Norm versehen.

Fragenblock:

8. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist die Hessematrix symmetrisch. [|]
9. Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ ist beschränkt. [|]
10. Die Funktionenfolge $f_n : [0, \infty) \to [0, 1]$, $x \mapsto \max\{1 - |x - n|, 0\}$ konvergiert gleichmäßig. [|]
11. Sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so gilt $f(\gamma(1)) = f(\gamma(-1)) + \int_{-1}^{1} f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$. [|]
12. Ist für stetige Funktionen $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion y eine Lösung der Differentialgleichung $y'' = ay' + by + c$ mit Anfangswerten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$, so ist die konstante Nullfunktion eine Lösung des Anfangswertproblems. [|]

Lösung 10: