Aufgabe 1: (6 Punkte)

(a) Differenzieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(x^2 - 1\right) e^{-x^2+1} \sin(x)$$

einmal nach x und fassen Sie die sin und cos Terme zusammen.

(b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \sin(y) \\ x - y \\ y \cos(x) \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie die Stammfunktion von

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos(\log(x))}{x}.$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \; x \mapsto x \cos(x) + \tan(x) + \frac{1}{2}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung, $\frac{d}{dx} f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, von f.

(b) Zeichnen Sie für $x \in [0, 2\pi]$ die Funktion f, und die erste und zweite Ableitung $\frac{d}{dx} f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ mit unterschiedlichen Farben in eine Graphik. Sorgen Sie dafür, dass der Wertebereich (y-Achse) sinnvoll beschränkt wird und dass an den Sprungstellen keine waagerechten Linien auftreten.

(c) Bestimmen Sie die Tangente g zu f an der Stelle $x_0 = 2.2$ und berechnen Sie den Schnittpunkt x_1 der Tangente mit der x-Achse.

(d) Bestimmen Sie nun die Tangente h zu f an der Stelle x_1

(e) Zeichnen Sie für $x \in [0, 2\pi]$ die Funktion f und die beiden Tangenten, g und h, in eine Graphik. Sorgen Sie wie in (b) dafür, dass der Wertebereich (y-Achse) sinnvoll beschränkt wird und dass an den Sprungstellen keine waagerechten Linien auftreten.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \to R, \quad x \mapsto (1 - x^4).$$

(a) Bestimmen Sie für $n = 0, \ldots, 9$ Koeffizienten

$$c_j = \int_{-1}^{1} f(x) \cos(k\pi x) dx.$$

(b) Berechnen Sie anschliessend für $k = 0, \ldots, 9$ Funktionen

$$g_k(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j \cos(j\pi x).$$

(c) Zeichnen Sie für $x \in [-1, 1]$ die Graphen von f, g_2, g_3 und g_4 in ein gemeinsames Bild.

(d) Berechnen Sie für $k = 0, \ldots, 9$ den Absolutbetrag der Differenz $f - g_k$ an der Stelle $x = 0$ und geben Sie das Ergebnis in übersichtlicher Form aus.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

(a) Stellen Sie die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 = 16\}$ graphisch dar.

(b) Bestimmen Sie die möglichen Extremalstellen von $f(x, y) = x + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 16$, die man aus der Forderung erhält, dass die notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllt sind, und zeichnen Sie diese ebenfalls in das Bild aus (a) ein.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Gesucht ist eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von

$$\frac{d}{dx} y(x) + y(x) + x \cos(x) = 0 \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1).

(b) Bestimmen Sie jeweils für die beiden Startwerte $y(-1) = 0$ und $y(-1) = 1$ eine Lösung von (1).

(c) Zeichnen Sie die beiden Lösungen aus (b) für $x \in [-1, 2]$ in ein Bild.

(d) Ergänzen Sie das Bild aus Teil (c) durch das Vektorfeld in der x, y-Ebene, derart, dass die Vektorpfeile tangential zur Lösungskurve sind.