MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

5. 2. 2020

Schriftliche Prüfung zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

Bitte folgende Angaben ergänzen und **DEUTLICH LESBAR** in Druckbuchstaben schreiben:

Name: .... Vorname: ....

Matrikel-Nr.: .... Studienfach: ....

Fachsemester: ....

Account zur Klausur: .... Nummer des Computers: ....

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im WS 2019/2020 erworben habe,

☐ an einer schriftlichen Prüfung zur Computergestützten Mathematik zur Analysis bei .... im WS/SS .... teilgenommen, aber nicht bestanden habe,

☐ die Zulassung zur Prüfung im WS/SS .... erworben habe.

....
Unterschrift

Hinweise: WICHTIG !

- In Ihrem Home-Verzeichnis finden Sie die Dateien `WerBinIch.txt`, sowie `Aufgabe1.ipynb`, `Aufgabe2.ipynb`, `Aufgabe3.ipynb`, `Aufgabe4.ipynb` und `Aufgabe5.ipynb`.
- Ergänzen Sie zuerst die Datei `WerBinIch.txt` mit Ihrem Namen, Vorname, usw.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, die in Dateien mit jeweils dem zur Aufgabe passenden Namen in Ihrem Home-Verzeichnis gespeichert sind. Speichern Sie daher in kurzen Abständen Ihre Lösungen, um ggf. den Verlust von Daten zu vermeiden, falls `jupyter` einmal abstürzt.
- Nach der Klausur führen wir einen Restart des Kernels durch. Achten Sie daher darauf, dass die Option `Restart & Run all` unter `Kernel` ohne Fehlermeldung durchläuft.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, bei denen der Lösungsweg klar zu erkennen ist.
- Zum Bestehen dieser Klausur sind **15** Punkte hinreichend.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
max. Punkte	6	6	6	6	6	30
err. Punkte						

Aufgabe 1: (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

und und geben Sie jeweils das vereinfachte Ergebnis aus.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto \sin^2(x-y) + \sin^2(x-z) + \sin^2(y-z),$$

vereinfachen Sie die Einträge der Hessematrix und geben Sie den Gradienten und die vereinfachte Hessematrix aus.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{7x^2 + \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(x^2+1\right)}{3\left(x^2+1\right)}$$

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung, $\frac{d}{dx}f(x)$, von f.

(b) Zeichnen Sie f und $\frac{d}{dx}f(x)$ mit unterschiedlichen Farben über dem Intervall $[-10, 10]$ in eine Graphik.

(c) Bestimmen Sie die beiden asymptotischen Geraden für $x \to \pm\infty$ an die Funktion f. Gesucht sind also zwei Geraden $g^\pm : x \mapsto a^\pm x + b^\pm$ mit

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - g^+(x)| = 0 \text{ bzw. } \lim_{x\to-\infty} |f(x) - g^-(x)| = 0.$$

(d) Zeichnen wie in Teil (b) f, $\frac{d}{dx}f(x)$ und zusätzlich die beiden in Asymptoten aus (c) in die Graphik als schwarze Linien ein.

(e) Fügen Sie eine Legende mit geeigneten Labels hinzu.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Sei M die Menge

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_0^2 - x_0x_1 + 5x_0 + 2x_1^2 = 16\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie exakt die beiden möglichen Punkte in M, für die x_0 den größten oder kleinsten Wert hat.

(b) Zeichnen Sie mit Hilfe von `matplotlib` die Menge M und beschränken Sie die Achsen, sodass ein aussgekräftiges Bild entsteht.

(c) Zeichnen Sie die beiden Punkten aus Teil (a) in das Bild aus Teil (b).

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$\langle f, g\rangle := \int_{-2}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Bezeichnet man für $k \in \mathbb{N}_0$ mit x^k das Polynom $x^k : x \mapsto x^k$, so sind Polynome L_m vom Grad m rekursiv wie folgt definiert

$$L_m = x^m - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\langle x^m, L_k\rangle}{\langle L_k, L_k\rangle} L_k.$$

(a) Implementieren Sie eine Python-Funktion `myprod(f,g)`, die für `sympy`-Ausdrücke f und g die Zahl $\langle f, g\rangle$ zurückgibt.

(b) Berechnen Sie für $m = 0, \ldots, 10$ die Polynome L_m und geben Sie sie aus.

(c) Berechnen Sie eine 6×6 Matrix $A = (a_{km})_{k,m=0}^{5}$ mit Einträgen $a_{km} = \langle L_k, L_m\rangle$ und geben Sie diese aus.

(d) Zeichnen Sie die Polynome L_1, L_4, L_7 und L_{10} in verschiedenen Farben über dem Intervall $[-1, 1]$.

Hinweis: Erstellen Sie in (b) iterativ eine Liste, die als Elemente die Polynome L_k enthält und verwenden Sie die bereits berechneten Polynome. Eine naiv implementiere Funktion, die rekursiv die L_k berechnet kostet zuviel Zeit.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Gesucht ist eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von

$$\left(\sin(2x) + \frac{4}{3}\right) \frac{d}{dx} y(x) = \frac{-y(x) + 1}{5}. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) und geben Sie sie aus.

(b) Bestimmen Sie jeweils für die beiden Startwerte $y(0) = 6$ und $y(0) = -2$ eine Lösung von (1).

(c) Zeichnen Sie die beiden Lösungen aus (b) für $x \in [0, 5]$ in verschiedenen Farben in ein Bild.

(d) Ergänzen Sie das Bild aus Teil (c) durch das Vektorfeld in der x, y-Ebene, derart, dass die Vektorpfeile tangential zu den Lösungskurven sind. Beschränken Sie die y-Achse auf den Bereich $[-2, 6]$.