MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

31. 1. 2018

Schriftliche Prüfung zur Numerik II

(PO 2014: Erste Klausur / PO 2008: Klausur)

Aufgabe 1: (10 Punkte)

[wahr | falsch]

1. Das globale Minimum einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist eindeutig. [|]
2. Das Verfahren des goldenes Schnittes zur Minimierung einer Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ konvergiert gegen ein globales Minimum, falls f stetig differenzierbar ist. [|]
3. Für eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ hat der Krylovraum $\mathcal{K}_k(A, b)$ die Dimension k. [|]
4. Das Newtonverfahren zur Minimierung der quadratischen Funktion $\phi(x) = x^T Ax + b^T x + c$ für eine symmetrisch positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ist ein Abstiegsverfahren. [|]
5. Beim GMRES Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ fällt der Fehler $||x^* - x^k||_2$ monoton. Hierbei ist x^* die exakte Lösung, x^k die k-te Iterierte und $|| \, ||_2$ die euklidische Norm. [|]
6. Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär ähnlich zu einer oberen Hessenbergmatrix. [|]
7. Bezeichnet man mit $*$ die Faltung und mit $\bullet$ die elementweise Multiplikation für Vektoren $u, v \in \mathbb{C}^n$ so gilt für die Fouriertransformation $\mathcal{F}_n(u * v) = \mathcal{F}_n(u) \bullet \mathcal{F}_n(v)$. [|]
8. Für $a, b \in \mathbb{C}^n$ kann man mit Hilfe der Fouriertransformation das durch die Faltung $a * x = b$ gegebene lineare Gleichungssystem mit einem Aufwand von $\mathcal{O}(N \log(N))$ exakt lösen. [|]
9. Die Fourierkoeffizienten einer 2π periodischen zweimal stetig differenzierbaren Funktion bilden eine Nullfolge. [|]
10. Die Fourierkoeffizienten einer 2π periodischen zweimal stetig differenzierbaren Funktion sind absolut summierbar. [|]

Hinweis: Sie müssen bei allen folgenden Aufgaben auch Ihre Argumentation und Ihre Rechenwege aufschreiben. Falls nicht ausdrücklich in der Aufgabenstellung vermerkt, reicht es nicht aus nur Ergebnisse anzugeben. Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein **neues** Blatt.

Aufgabe 2: (3 + 4 Punkte)

(a) Zur Berechnung des Maximums einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann man bei der Schrittweitenwahl die Wolfe-Bedingungen in modifizierter Form verwenden. Geben Sie geeignete modifizierte Wolfe-Bedingungen an.

(b) Zur Berechnung des Maximums einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann man ein Newtonverfahren mit geeigneter Schrittweitenwahl verwenden. Geben Sie hierfür einen Pseudocode an, wobei Sie die Schrittweitenwahl abstrakt beschreiben können. Ein detailierter Pseudocode für die Schrittweitenwahl ist also nicht nötig.

Hinweis: Eine Schrittweite α erfüllt die Wolfe-Bedingungen zur Bestimmung eines Minimums von $\tilde{f}$, falls für Konstanten $0 < c_1 < c_2 < 1$ und die Suchrichtung s gilt:

$$\tilde{f}(x + \alpha s) \leq \tilde{f}(x) + c_1 \alpha \nabla \tilde{f}(x)^T s \quad \text{und} \qquad \nabla \tilde{f}(x + \alpha s)^T s \geq c_2 \nabla \tilde{f}(x)^T s.$$

Aufgabe 3: (3+4+3 Punkte)

Sei

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{8}{5} & 0 \\ -3 & \frac{31}{5} & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie mit Hilfe der Gershgorinkreise von A einen möglichst kleinen Bereich in der komplexen Ebene, der die Eigenwerte von A enthält, ohne die Eigenwerte explizit zu berechnen.

(b) Führen Sie einen Schritt des QR-Algorithmus zur Bestimmung der Eigenwerte von A durch.

(c) Lässt sich mit Hilfe des Ergebnisses aus (b) der in (a) skizzierte Bereich weiter verkleinern? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, fertigen Sie eine neue Skizze des verkleinerten Bereiches.

Hinweis: Ohne eigene Rechnung können Sie verwenden, dass die QR-Zerlegung von A gegeben ist durch

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \\ -\frac{3}{5} & \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage:

Führt man das Arnoldi Verfahren zur Berechnung einer Orthonormalbasis des Krylovraums $\mathcal{K}_m(A, b)$ für $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$ durch, so gilt, mit den aus der Vorlesung bekannten Bezeichnungen, dass der Wertebereich von H_m, $\mathcal{F}(H_m)$ im Wertebereich von A enthalten ist.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ungerades $N \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine periodisch fortgesetzte ungerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = -x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ ungerade.

Hinweis: Eine ungerade Folge hat für ungerades N die Form
$[0\,,\, x_1\,,\, \cdots x_{(N-1)/2}\,,\, -x_{(N-1)/2}\,,\, \cdots - x_2\,,\, -x_1]$.

Aufgabe 6: (3 Punkte)

Zeigen Sie: Ist P eine Projektion, so ist $I - P$ ebenfalls eine Projektion. (I bezeichnet die Identität.)