Aufgabe 1: (6 Punkte)

(a) Differenzieren Sie die Funktion f zweimal

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto e^x \cos^2(x) \tan(x)$$

und fassen Sie die Terme sinnvoll zusammen.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \log\left(\left\| \begin{pmatrix} a - x \\ b - y \end{pmatrix} \right\|_2 \right).$$

Aufgabe 2: (6 Punkte) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung, $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, von f.

(b) Berechnen Sie alle paarweisen Schnittpunkte von f, $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$.

(c) Zeichnen Sie f, $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ mit unterschiedlichen Farben in eine Graphik. Wählen Sie den Definitionsbereich so, dass ein aussagekräftiges Bild entsteht.

(d) Fügen Sie eine Legende mit geeigneten Labels hinzu.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Zeichnen Sie für die beiden Parameter $\alpha \in \{1, 2\}$ jeweils die Menge

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z^2 - z + 2}{z^2 + z - 1} \right| = \alpha \right\}$$

in der komplexen Ebene. Beschränken Sie den Real- und Imaginärteil auf das Intervall $[-2, 2]$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Sei

$$f(x) = \sin(2\pi x)\,, \text{ für } \quad x \in [-1, 1].$$

Die Tschebyscheff Polynome auf dem Intervall $[-1, 1]$ werden rekursiv durch

$$T_0(x) = 1\,, \quad T_1(x) = x\,, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

definiert.

(a) Berechnen Sie für $N = 10$ und $h = \frac{\pi}{2(N+1)}$ die Werte $(x_0, x_1, \ldots x_N)$, etwa als Liste, wobei x_j durch $x_j = \cos((2j + 1)h)$ gegeben sind.

(b) Berechnen Sie anschließend $c = (c_0, c_1, \ldots, c_N)$ mit Einträgen

$$c_\ell = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k) \cos(\ell(2k + 1)h).$$

(c) Berechnen Sie für $n \in \{4, 6, 9\}$

$$p_n(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x).$$

(d) Zeichnen Sie $f(x)$, $p_4(x)$, $p_6(x)$ und $p_9(x)$ in ein Bild für $x \in [-1, 1]$.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Gesucht ist eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von

$$(y(x) + 1)\frac{d}{dx}y(x) = \sin(x)y(x). \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1).

(b) Bestimmen Sie jeweils für die beiden Startwerte $y(0) = 1$ und $y(0) = \frac{1}{2}$ eine Lösung von (1). Sie können dazu die jeweiligen Gleichungen für den freien Parameter auch numerisch mit `nsolve` bestimmen. (Ein geeigneter Startwert hierfür ist 3.)

(c) Zeichnen Sie die beiden Lösungen aus (b) für $x \in [0, 10]$ in ein Bild.

(d) Ergänzen Sie das Bild aus Teil (c) durch das Vektorfeld in der x, y-Ebene, derart, dass die Vektorpfeile tangential zur Lösungskurve sind.

Hinweis:: Um die Sympy `LambertW` Funktion auszuwerten, gibt es im Modul `scipy.special` die Funktion `lambertw`, davon benötigen Sie zum Zeichnen nur den Realteil.