Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Max Schneiders

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

25. 1. 2018

Schriftliche Prüfung zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

(PO 2014: Erste Klausur / PO 2008: Klausur)

Bitte folgende Angaben ergänzen und **DEUTLICH LESBAR** in Druckbuchstaben schreiben:

Name: .... Vorname: ....

Matrikel-Nr.: .... Studienfach: ....

Fachsemester: ....

Account zur Klausur: .... Nummer des Computers: ....

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im WS 2017/2018 erworben habe,

☐ an einer schriftlichen Prüfung zur Computergestützten Mathematik zur Analysis bei .... im WS/SS .... teilgenommen, aber nicht bestanden habe,

☐ die Zulassung zur Prüfung im WS/SS .... erworben habe.

....
Unterschrift

Hinweise: WICHTIG !

- In Ihrem Home-Verzeichnis finden Sie die Dateien `WerBinIch.txt`, sowie `Aufgabe1.ipynb`, `Aufgabe2.ipynb`, `Aufgabe3.ipynb`, `Aufgabe4.ipynb`, `Aufgabe5.ipynb`
- Ergänzen Sie zuerst die Datei `WerBinIch.txt` mit Ihrem Namen, Vorname, usw.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, die in Dateien mit jeweils dem zur Aufgabe passenden Namen in Ihrem Home-Verzeichnis gespeichert sind. Speichern Sie daher in kurzen Abständen Ihre Lösungen, um ggf. den Verlust von Daten zu vermeiden, falls `jupyter` einmal abstürzt.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, bei denen der Lösungsweg klar zu erkennen ist.
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten.
- Zum Bestehen dieser Klausur sind **15** Punkte hinreichend.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
max. Punkte	6	6	6	6	6	30
err. Punkte						

Hinweise: Sie benötigen eventuell die module ??

Aufgabe 1: (6 Punkte)

(a) Differenzieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \cos(x)\exp(1 + x^{-3})\ln(x^3 - 1)$$

und fassen Sie die Terme sinnvoll zusammen.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto -5 + \frac{\sqrt{1 - x^2 + x^4}}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

(a) Zeichnen Sie die Graphen von f, f' und f'' über dem Intervall $[-5, 5]$ in eine gemeinsame Grafik in festgelegten Farben mit einer Legende.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und stellen Sie fest, um welchen Typ es sich jeweils handelt.

(c) Bestimmen sie die lineare Asymptote g an f für $x \to \infty$. D.h. bestimmen Sie die Parameter m und b von $x \mapsto g(x) = mx + b$ so, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Aufgabe 3: (6 Punkte) Sei $K_p := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$ und

$$A := \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie K_p, $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \infty$ in einen gemeinsamen Plot in verschiedenen Farben und mit einer aussagekräftigen Legende.

(b) Bestimmen Sie die Menge $AS_1 := \{Ax | x \in S_1\}$ und $B^{-1}S_1 := \{x | Bx \in S_1\}$ analytisch, d.h. geben Sie eine explizite Formel für die Komponenten von $x \in AS_1$ bzw. $x \in B^{-1}S_1$ an.

(c) Zeichnen Sie $\{Ax \mid x \in K_2\}$ und $\{x \mid Bx \in K_2\}$ in einen gemeinsamen Plot in verschiedenen Farben und mit einer aussagekräftigen Legende, **ohne** die Befehle `plot_implicit` oder `contour` zu verwenden.

(d) Fügen Sie den Gradienten der Funktion

$$f := x \mapsto \|A^{-1}x\|_2$$

in Ihrer Zeichnung aus (b) als Vektorfeld hinzu.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x| + (\cos(x))^3$ und

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, \mathrm{d}t, \qquad k \geq 0.$$

(a) Berechnen Sie für $k = 0, \ldots, 15$ die Werte von a_k.

(b) Berechnen Sie für $n = 1, 4, 7, 10, 15$ die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx).$$

(c) Zeichnen Sie f, f_1, f_4 und f_7 über dem Intervall $[-\pi, \pi]$ in eine gemeinsame Grafik in unterschiedlichen Farben.

(d) Berechnen Sie für $n \in \{1, 4, 7, 10, 15\}$ und $a \in \{\frac{l}{\pi} \mid l = 0, 1, 2, 3\}$ jeweils die Werte $|f(a) - f_n(a)|$ numerisch und stellen Sie diese übersichtlich dar.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Gesucht ist eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von

$$y'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} y(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix} \tag{1}$$

(a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem (**??**) mit dem Startwert $y(0) = \begin{bmatrix} 1, & 0 \end{bmatrix}^T$ für allgemeines ω und g.

(b) Plotten Sie für $\omega = 3$ und $g(x) = x^2$ die beiden Komponenten der Lösung jeweils gegen x auf $[0, 2\pi]$ in einen gemeinsamen Plot.

(c) Lösen Sie (**??**) nun mit festem $g(x) = x^2$ und $\omega = 1$. Der Startwert bleibt zunächst unbestimmt. Bestimmen Sie die freien Parameter der Lösung so, dass $y_1(0) = 1$ und $y_2(10) = 1$ gelten. Plotten Sie die beiden Komponenten der Lösung jeweils gegen x auf $[0, 10]$ in einen gemeinsamen Plot.

Hinweis: Es genügt nicht, die Bedingungen $y_1(0) = 1$ und $y_2(10) = 1$ dem Befehl `dsolve` direkt zu übergeben.