Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle

Heinrich Heine
Universität Düsseldorf

9.8.2017

KLAUSUR zur "Numerik I" mit Lösungen

Aufgabe 1: (10 Punkte) [wahr | falsch]

1. Die maximale Ordnung einer s-stufigen Quadraturformel ist s^2. [| ×]

2. Der Clenshaw Algorithmus erlaubt es, ein Polynom in der Tschebyscheff-Darstellung stabil auszuwerten. [× |]

3. Der Aufwand zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ liegt in $\mathcal{O}(n^2)$. [| ×]

4. Betrachtet man den Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit der Supremumsnorm und $\mathbb{R}$ mit dem Betrag als Norm, so ist die relative Kondition der Integration von 0 bis 1 einer stetige Funktion kleiner als 2. [| ×]

5. Die Multiplikation zweier reeller Zahlen ist stabil im Sinne der Rückwärtsanalysis. [× |]

6. Die Division zweier reller Zahlen ist stabil im Sinne der Vorwärtsanalysis. [| ×]

7. Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^n$, so konvergiert für $F(x) = Ax + b$ das Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ in endlich vielen Schritten für beliebige Startwerte gegen eine Lösung. [× |]

8. Für eine stetig differenzierbare Funktion F konvergiert das Newton-Verfahren für beliebige Startwerte gegen eine Lösung. [| ×]

9. Die implizite Mittelpunktsregel zur Lösung eines Anfangswertproblems, gegeben durch die Iterationsvorschrift
$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right),$$
ist ein Runge-Kutta-Verfahren. [× |]

10. Das Verfahren $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h/2, y_n)$ ist ein explizites Runge-Kutta-Verfahren. [× |]

Aufgabe 2: (5 + 2 Punkte)

a) Konstruieren Sie eine zweistufige, symmetrische Quadraturformel auf $[0,1]$ maximaler Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Ordnung dieser Quadraturformel, oder begründen Sie warum diese Quadraturformel eine bestimmte Ordnung hat.

Lösung 2:

a) Die maximale Ordnung einer s-stufigen Quadraturformel ist $2s$ (Gauß). Hier ist $s = 2$. Wir konstruieren also die zweistufige Gauß-Quadraturformel. Aufgrund der Symmetrie gilt bereits $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$. **(2P.)**

Wir berechnen die Knoten nun mit Hilfe der Ordnungsbedingungen. Die erste Ordnungsbedingung liefert eine Gleichung für die Gewichte.

$$b_1 + b_2 = 1$$

Aufgrund der Symmetrie $b_1 = b_2$ ist also $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$. Nun reicht es aus, die dritte Ordnungsbedingung zu betrachten, da dann sofort folgt, dass die Quadraturformel die Ordnung 4 hat (Symmetrische Quadraturformeln haben gerade Ordnung). Es macht keinen Sinn die vierte Ordnungsbedingung zu betrachten!

Zunächst gilt $c_1 = 1 - c_2$. Zusammen mit der Ordnungsbedingung $b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 = \frac{1}{3}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-c_2)^2 + \frac{1}{2}c_2^2 &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - c_2 + \frac{1}{2}c_2^2 + \frac{1}{2}c_2^2 - \frac{1}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad c_2^2 - c_2 + \frac{1}{6} &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$c_2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Damit haben wir direkt beide Knoten $c_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ gefunden und es gilt **(2P.)**

$$\mathrm{Q}(f) \approx \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right). \qquad \textbf{(1P.)}$$

Alternative 1: Die Knoten lassen sich auch mit der Orthogonalitätsbedingung an das Knotenpolynom bestimmen

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t-c_1)(t-c_2)dt &= 0 \\ \int_0^1 (t-c_1)(t-(1-c_1))dt &= 0 \quad \text{Symmetrie} \\ \int_0^1 t^2 - t - c_1(c_1-1)dt &= 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - c_1(c_1-1) &= 0 \\ -\frac{1}{6} - c_1^2 + c_1 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist $c_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ und $c_2 = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Alternative 2 (ohne Symmetrie): Die Knoten lassen sich auch mit der Orthogonalitätsbedingung an das Knotenpolynom bestimmen

$$\int_0^1 (t-c_1)(t-c_2)dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 (t-c_1)(t-c_2)t\,dt = 0$$
$$\int_0^1 t^2-(c_1+c_2)t+c_1c_2dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 t^3-(c_1+c_2)t^2+c_1c_2t\,dt = 0$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(c_1+c_2)+c_1c_2dt = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}-(c_1+c_2)\frac{1}{3}+\frac{1}{2}c_1c_2dt = 0$$

LGS für $\sigma_1 = c_1+c_2$ und $\sigma_2 = c_1c_2$.

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

mit Lösung $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1/6$. Damit ist $c_1+c_2 = 1$ und $c_1c_2 = 1/6$. Daraus folgt

$$c_1 + \frac{1}{6c_1} = 1 \Leftrightarrow c_1^2 + \frac{1}{6} - c_1 = 0$$

und wieder ist $c_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$.

b) Die obige Quadraturformel ist die zweistufige Gauß-Quadratur und hat die Ordnung $2s = 4$. **(2P.)**

Aufgabe 3: (7 + 2 + 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonschen dividierten Differenzenschemas das Interpolationspolynom p zu den Daten $x_0 = -1$, $f(x_0) = 4$, $x_1 = 0$, $f(x_1) = -2$, $x_2 = 2$, $f(x_2) = 1$, und $x_3 = -2$, $f(x_3) = -5$.

b) Werten das Interpolationspolynom p mit Hilfe des Hornerschemas an der Stelle $x = 3$ aus.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonschen dividierten Differenzenschemas das Polynom kleinsten Grades q, das die Daten $x_0 = -1$, $f(x_0) = 4$, $x_1 = 0$, $f(x_1) = -2$ und $x_2 = 2$, $f(x_2) = 1$ interpoliert und zusätzlich $q'(x_0) = -4$ erfüllt.

Lösung 3:

a) Aufstellen des Newton-Tableaus:

$$\begin{array}{cccccc}
x_i & f(x_i) & & & \\
-1 & \boxed{4} & & & \\
 & & \boxed{-6} & & \\
0 & -2 & & \boxed{\frac{5}{2}} & \\
 & & \frac{3}{2} & & \boxed{\frac{5}{2}} \\
2 & 1 & & 0 & \\
 & & \frac{3}{2} & & \\
-2 & -5 & & &
\end{array}$$

(4P.)

Es folgt

$$\begin{aligned} p(x) &= 4 - 6(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)x + \frac{5}{2}(x+1)x(x-2) \\ &= 4 - 6x - 6 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x \\ &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{17}{2}x - 2. \end{aligned}$$

(3P.)

b) Auswertung an der Stelle $x = 3$ mit dem Horner-Schema:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{5}{2} \\
\alpha_1 &= \frac{5}{2}(3-2) + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5 \\
\alpha_2 &= 5 \cdot 3 - 6 = 9 \\
\alpha_3 &= 9(3+1) + 4 = 36 + 4 = 40 = p(3).
\end{aligned} \qquad \textbf{(2P.)}$$

c) Aufstellen des Newton-Tableaus:

x_i	$f(x_i)$			
-1	$\boxed{4}$			
		$\boxed{-4}$		
-1	4		$\boxed{-2}$	
		-6		$\boxed{\frac{3}{2}}$
0	-2		$\frac{5}{2}$	
		$\frac{3}{2}$		
2	1			

(2P.)

Es folgt

$$\begin{aligned}
q(x) &= 4 - 4(x+1) - 2(x+1)^2 + \frac{3}{2}(x+1)^2 x \qquad \textbf{(3P.)} \\
&= 4 - 4x + 4 - 2x^2 - 4x - 2 + \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x \\
&= \frac{3}{2}x^3 + x^2 - \frac{13}{2}x - 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Leiten Sie für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ das lineare Gleichungssystem für die Parameter $\tau_j = s'(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$ für den sogenannten periodischen kubischen Spline her, d.h. für den kubischen Spline, der zusätzlich die Bedingungen $s'(a) = s'(b)$ und $s''(a) = s''(b)$ erfüllt. Wie sieht die Matrix und der rechte Seite Vektor aus, die Sie mit ihrer Herleitung erhalten?

Erinnerung:

Zu einer Unterteilung des Intervalls $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$ ist der kubische Spline zu den Daten $y_j = f(x_j)$ für $j = 0, \ldots, n$ diejenige zweimal stetig differenzierbare und stückweise kubische Funktion s, die $s(x_j) = f(x_j)$ $j = 0, \ldots, n$ erfüllt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
s|_{[x_{i-1},x_i]}(x) &= y_{i-1} + (x - x_{i-1})\delta y[x_{i-1}, x_i] + \\
&\frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^2}\left((\tau_i - \delta y[x_{i-1}, x_i])(x - x_{i-1}) + (\tau_{i-1} - \delta y[x_{i-1}, x_i])(x - x_i)\right) \\
s|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) &= y_i + (x - x_i)\delta y[x_i, x_{i+1}] + \\
&\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^2}\left((\tau_{i+1} - \delta y[x_i, x_{i+1}])(x - x_i) + (\tau_i - \delta y[x_i, x_{i+1}])(x - x_{i+1})\right)
\end{aligned}$$

gilt, wobei $\delta y[x_{i-1}, x_i]$ und $\delta y[x_i, x_{i+1}]$ die ersten dividierten Differenzen sind. Es ist

$$s''|_{[x_{i-1},x_i]}(x) = 6\frac{(-2x + x_{i-1} + x_i)\delta y[x_{i-1}, x_i]}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{(6x - 4x_{i-1} - 2x_i)\tau_i + (6x - 4x_i - 2x_{i-1})\tau_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2}$$

$$s''|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) = 6\frac{(-2x + x_i + x_{i+1})\delta y[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+1} - x_i)^2} + \frac{(6x - 4x_i - 2x_{i+1})\tau_{i+1} + (6x - 4x_{i+1} - 2x_i)\tau_i}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

Diese Resultate können Sie ohne Beweis verwenden.

Lösung 4:

Definiere zunächst $h_i = x_i - x_{i-1}$. Wir setzen $s''\big|_{[x_{i-1},x_i]}(x_i) = s''\big|_{[x_i,x_{i+1}]}(x_i)$. **(Idee: 2P.)**

Es gilt

$$\begin{aligned}
s''\big|_{[x_{i-1},x_i]}(x_i) &= 6\frac{(-2x_i + x_{i-1} + x_i)\delta y[x_{i-1}, x_i]}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{(6x_i - 4x_{i-1} - 2x_i)\tau_i + (6x_i - 4x_i - 2x_{i-1})\tau_{i+1}}{(x_i - x_{i-1})^2} \\
&= -6\frac{h_i\delta y[x_{i-1}, x_i]}{h_i^2} + \frac{4h_i\tau_i + 2h_i\tau_{i-1}}{h_i^2} \\
&= \frac{-6\delta y[x_{i-1}, x_i]}{h_i} + \frac{4\tau_i + 2\tau_{i-1}}{h_i}.
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$s''\big|_{[x_i,x_{i+1}]}(x_i) = \frac{6\delta y[x_i, x_{i+1}]}{h_{i+1}} - \frac{2\tau_{i+1} + 4\tau_i}{h_{i+1}}.$$

Daraus folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
&\frac{-6\delta y[x_{i-1}, x_i]}{h_i} + \frac{4\tau_i + 2\tau_{i-1}}{h_i} = \frac{6\delta y[x_i, x_{i+1}]}{h_{i+1}} - \frac{2\tau_{i+1} + 4\tau_i}{h_{i+1}} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\tau_{i-1}}{h_i} + 2\tau_i\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) + \frac{\tau_{i+1}}{h_{i+1}} = 3\left(\frac{\delta y[x_{i-1}, x_i]}{h_i} + \frac{\delta y[x_i, x_{i+1}]}{h_{i+1}}\right).
\end{aligned}$$

Wegen der periodischen Randbedingung $s'(a) = s'(b)$ folgt $\tau_0 = \tau_n$, so dass das Gleichungssystem die Form

$$\begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & & & \frac{1}{h_1} \\ \frac{1}{h_2} & 2\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & & \\ & & \ddots & & \\ \frac{1}{h_1} & & & \frac{1}{h_n} & 2\left(\frac{1}{h_n}+\frac{1}{h_1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

hat. Hierbei ist

$$d_i = 3\left(\frac{\delta y[x_{i-1}, x_i]}{h_i} + \frac{\delta y[x_i, x_{i+1}]}{h_{i+1}}\right).$$

Beachte: Aufgrund der Periodizität gilt $h_{n+1} = h_1$. **(2P. Matrix, 1P. Vektor)**

Hinweis: Die obige Darstellung ist nicht eindeutig, z. B. kann zusätzlich τ_0 mit der Bedingung $\tau_0 = \tau_n$ hinzugefügt werden!

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Die Schurzerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, falls sie existiert, eine Zerlegung $A = Q^T RQ$ der Matrix A mit einer orthogonalen Matrix Q und einer rechten oberen Dreiecksmatrix R.

Ausgehend von der Schurzerlegung-Zerlegung einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soll für einen Spaltenvektor $b \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ gelöst werden. Schreiben Sie dazu den Pseudocode einer Funktion SchurLGS mit der Signatur `SchurLGS(Q,R,b)`. Neben den elementaren arithmetischen Operationen $+, -, *, /$ und Programmsteueranweisungen wie `if, for, while` können Sie die Multiplikation von Skalaren mit Matrixen und Vektoren, die Matrix-Vektor-Multiplikation, das Transponieren von Matrizen und die Summation $\sum_{i=a}^{b}$ verwenden, nicht aber Befehle zum Lösen von linearen Gleichungsystemen oder zum Invertieren von Matrizen.

Lösung 5:

Da $A = Q^T RQ$ mit Q orthogonal und R obere rechte Dreiecksmatrix ist die Aufgabe "Löse $Ax = b$" gleichbedeutend mit $Q^T RQ = b$ bzw. $RQx = Qb$. Letzteres System kann man mittels Rückwärtssubstitution lösen und man erhält $Qx = y$ bzw. $x = Q^T y$ als gesuchte Lösung des ursprünglichen Systems. **(Idee: 2P.)**

Algorithmus 1 : Pseudo-Code

$x = \text{SchurLGS}(Q,\ R,\ b)$
Berechne $\tilde{b} = Qb$; **(1P.)**
for $i = n, \ldots, 1$ **do**
    $y_i = \frac{1}{r_{ii}} \left(\tilde{b}_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij} y_j \right)$; **(3P.)**
end
Berechne $x = Q^T y$; **(1P.)**

Aufgabe 6: (4 + 3 Punkte)

Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

kann man folgendes durch sein Butcher-Tableau gegebene Runge-Kutta-Verfahren verwenden:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Geben Sie die Iterationsvorschrift an, die man erhält wenn man dieses Verfahren zur Lösung der linearen Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$ verwendet.

b) Zeigen Sie, dass für eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion f der lokale Fehler $||y(t_0 + h) - y_1||$ in $\mathcal{O}(h^2)$ liegt.

Lösung 6:

a) Allgemein gilt

$$Y_1 = y_n + 0 \qquad Y_2 = y_n + hf(t_n, Y_1)$$

und damit

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} f\big(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)\big). \qquad \textbf{(2P.)}$$

Sei nun $f\big(t, y(t)\big) = Ay(t)$. Dann folgt

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} Ay_n + \frac{h}{2} A(y_n + hAy_n) = \left(I + hA + \frac{h}{2} A^2\right) y_n. \qquad \textbf{(2P./4P.)}$$

b) Sei

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0) + \frac{h}{2} f\big(t_0 + h, y_0 + hf(t_0, y_0)\big)$$

die numerische Lösung nach einem Schritt. Taylor-Entwicklung von $y(t_0 + h)$ im Punkt t_0 liefert

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \mathcal{O}(h^2).$$

Da $y(t_0) = y_0$ und $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ erhält man

$$y(t_0 + h) = y_0 + hf(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2). \qquad \textbf{(1P.)}$$

Wir definieren $g(h) = f\big(t_0 + h, y_0 + hf(t_0, y_0)\big)$. Taylor-Entwicklung von g im Punkt 0 ergibt

$$g(h) = g(0) + \mathcal{O}(h).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} y(t_0 + h) - y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2) - y_0 - \frac{h}{2} f(t_0, y_0) - \frac{h}{2} \underbrace{f\big(t_0 + h, y_0 + hf(t_0, y_0)\big)}_{=g(h)} \\ &= hf(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2) - \frac{h}{2} f(t_0, y_0) - \frac{h}{2} \left(f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)\right) \\ &= \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \qquad \textbf{(2P.)}$$

Damit liegt der lokale Fehler in $\mathcal{O}(h^2)$. Geht man bei den Taylor-Entwicklungen einen Schritt weiter, so kann man analog zeigen, dass der lokale Fehler sogar in $\mathcal{O}(h^3)$ liegt.