MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN
MARINA FISCHER
LEONARDO SCANDURRA
FELIX LIEDER
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

14. JUNI 2018

Numerik I – 2. Quicky

Pseudonym: ____________________

[wahr | falsch]

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, und seien Schrittweiten $h_0 > \ldots > h_n > 0$ mit $\frac{b-a}{h_j} \in \mathbb{N}$ gegeben. Bezeichne mit $T_{h_j}(f)$ die iterierte Trapezregel zur Schrittweite h_j und mit $T_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{N}_0$, die Iterierten des Romberg-Verfahrens.

   1.a. Ist $f \in C^2([a, b])$, so ist der Fehler $R_{h_j}(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_{h_j}(f)$ in der Größenordnung $\mathcal{O}(h_j^2)$. [|]

   1.b. Es gilt $T_{2,2} = p_{2,2}(0)$, wobei $p_{2,2}$ das Interpolationspolynom durch die Punkte $(h_j^2, T_{h_j}(f))$, $j = 0, 1, 2$, ist. [|]

   1.c. Die iterierte Trapezregel $T_{h_j}(f)$ liefert üblicherweise einen kleineren Fehler bei der Approximation von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ als die Iterierte $T_{j,j}$. [|]

   1.d. Für $h_0 = b - a$ und $h_1 = \frac{b-a}{2}$ entspricht $T_{1,1}$ genau der $3/8$-Regel. [|]

2. Sei Q_n eine Quadraturformel auf dem Grundintervall $[a, b]$ mit $n + 1$ paarweise verschiedenen Knoten $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ und Gewichten $a_0, \ldots, a_n$.

   2.a. Die Quadraturformel Q_n hat Ordnung m, wenn durch sie mindestens ein Polynom $p \in \mathbb{P}_{m-1}$ exakt integriert wird. [|]

   2.b. Q_n hat mindestens Ordnung $n + 1$. [|]

   2.c. Sind Gewichte a_j, $j = 0, \ldots, n$, gegeben und ist Q_n interpolatorisch, so sind die Knoten x_j, $j = 0, \ldots, n$, eindeutig bestimmt. [|]

   2.d. Ist Q_n interpolatorisch, so sind die Gewichte a_j, $j = 0, \ldots, n$, zu gegebenen Knoten $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ eindeutig bestimmt. [|]

   2.e. Die maximale Ordnung von Q_n ist $2n + 2$. [|]

   2.f. Zu beliebig gewählten Knoten $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ lassen sich immer Gewichte a_j, $j = 0, \ldots, n$, finden, so dass Q_n die Ordnung $n + 2$ besitzt. [|]

   2.g. Auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind Quadraturformeln mit Ordnung $2n + 2$ eindeutig bestimmt. [|]

   2.h. Die Lagrange-Polynome sind auf $[-1, 1]$ orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. [|]

   2.i. Die Tschebyscheff-Polynome $T_j(x) := \cos(j \arccos(x))$, $j \in \mathbb{N}_0$, lassen sich über das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren bestimmen. [|]

Das Tempo der Vorlesung ist zu schnell ☐, okay ☐, zu langsam ☐.
Die Übungsaufgaben sind zu einfach ☐, gerade richtig ☐, zu schwierig ☐.
Die Programmieraufgaben sind zu einfach ☐, gerade richtig ☐, zu schwierig ☐.