Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Melinda Hagedorn

19.11.2026

Computergestützte Mathematik zur linearen Algebra – 6. Übungsblatt

Aufgabe 21: *(Bild unter linearer Abbildung in $\mathbb{R}^2$)*

(a) Schreiben Sie eine Funktion `plotBildAbb(A)`, die den Einheitskreis (also $K := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$), sowie das Einheitsquadrat (also $Q := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\}$) und jeweils das Bild dieser Mengen unter der von einer gegebenen Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ induzierten linearen Abbildung

$$\boldsymbol{L_A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{L_A}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

in ein gemeinsames Fenster zeichnet. Benutzen Sie `axis('equal')`.
Hinweis: Sie können die Urbildpunkte in einem $2 \times n$-Array `k` bzw. `q` speichern. Zeichnen Sie die erste gegen die zweite Zeile von `k` bzw. `q`. Die lineare Abbildung können Sie durch Matrix-Matrix-Multiplikation direkt auf alle Punkte anwenden. *Tipp für die Darstellung von Q: Verwenden Sie, wie in der Vorlesung, die Vektoren der Eckpunkte.*

(b) Erweitern Sie den Plot soweit, dass die vier Eckpunkte des Einheitsquadrats in vier unterschiedlichen Farben markiert sind. Überlegen Sie, auf welche Punkte die Eckpunkte jeweils abgebildet werden und markieren Sie diese Punkte in der dazugehörigen Farbe.

(c) Testen Sie Ihre Funktion mit den folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}_2 - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T,$$

mit $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Was bewirken die Matrizen?

Aufgabe 22: *(Die Hilfe verwenden)*

Verwenden Sie die Python-Hilfe, um die folgenden Aufgaben zu lösen.

(a) Wie lautet der Winkel von $2 + 3i$, d.h. wie lautet $\varphi \in [-\pi, \pi]$ für $2 + 3i = r \cdot e^{i\varphi}$? Wie erhalten wir den Radius r?

(b) Zeichnen Sie in der komplexen Ebene die Menge

$$M := \left\{ \frac{z + \frac{3}{2}i}{z - 2i} \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1 \text{ für } z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Finden Sie hierzu heraus, wie Sie auf den Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl zugreifen können.

Hinweis: Wenn Sie den gewünschten Befehl nicht kennen, sehen Sie nach, ob ein vielleicht passender englischer Befehl existiert.

b.w.

Aufgabe 23: (*Bild unter linearer Abbildung in* $\mathbb{R}^3$)

Für diese Aufgabe benötigen Sie die Datei `sphere.py`, die Sie auf der Vorlesungshomepage finden.

(a) Lesen und verstehen Sie den Code. Sie sollten unter anderem die folgenden Fragen beantworten können:

- Welches Objekt wird parametrisiert und wie wird es dargestellt?
- Was macht der Befehl `quiver`?
- An welcher Stelle lässt sich die Colormap verändern und welche anderen Colormaps gibt es noch? (Hier könnte die PYTHON-Hilfe im Internet nützlich sein.)

(b) Erweitern Sie den Code in `sphere.py` nun zu einer Funktion `plotBildSphere(A)`, die das Objekt und dessen Bild unter der von einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ induzierten linearen Abbildung

$$\boldsymbol{L_A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{L_A}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{Ax}$$

nebeneinander plottet. Achten Sie darauf, dass Sie für die bessere Vergleichbarkeit dieselben Achsengrenzen bei beiden Plots verwenden.

(c) Testen Sie Ihre Funktion mit den folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Was bewirken die Matrizen? Zeichnen Sie hierzu den Richtungsvektor $\boldsymbol{u}$ mit Hilfe des Befehls `quiver` in den Plot der Figur unter der Abbildung $\boldsymbol{L_C}$.

Bemerkung: Wenn Sie in SPYDER unter Tools - Preferences - IPython console - Graphics die Einstellung Backend auf Automatic setzen, erhalten Sie interaktive Plots. Gegebenenfalls ist ein Neustart des Kernels notwenig.

Aufgabe 24: (*Fortsetzung Euler-Ziegel*)

Lassen Sie Aufgabe 17 von Blatt 5 von mindestens zwei verschiedenen KI-Tools lösen. Überprüfen Sie die Lösungen auf Korrektheit und vergleichen Sie die Effizienz dieser Lösungen mit Ihrer eigenen Lösung. Erklären Sie jeweils die Vorgehensweise, die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede der Lösungen.

Besprechung in den Übungen vom 23.11.2026 bis 26.11.2026.