# Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra

## Graphen und Eigenwerte

**Achim Schädle**

23. Januar 2025

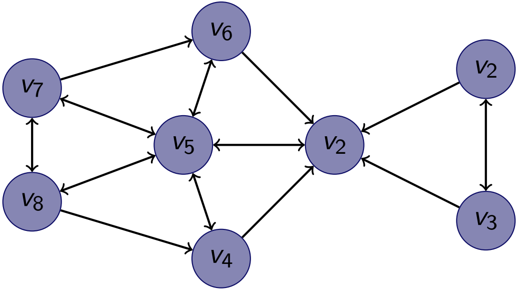
# Erinnerung

Bitte melden Sie sich rechtzeitig im Studierendenportal (`https://studierende.uni-duesseldorf.de/`) zur Klausur an.

# Graphen – Mathematische Definition

Ein Graph ist definiert durch $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$

- Knoten $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - Personen, Städte, Internetseiten, …
- Kanten $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
  - Beziehungen, Verbindungen, Links, …



# Adjazenzmatrizen

Die Adjazenzmatrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{V}|}$ eines Graphen $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ist definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

# Gewichtete Graphen — Motivation: Epidemiologie

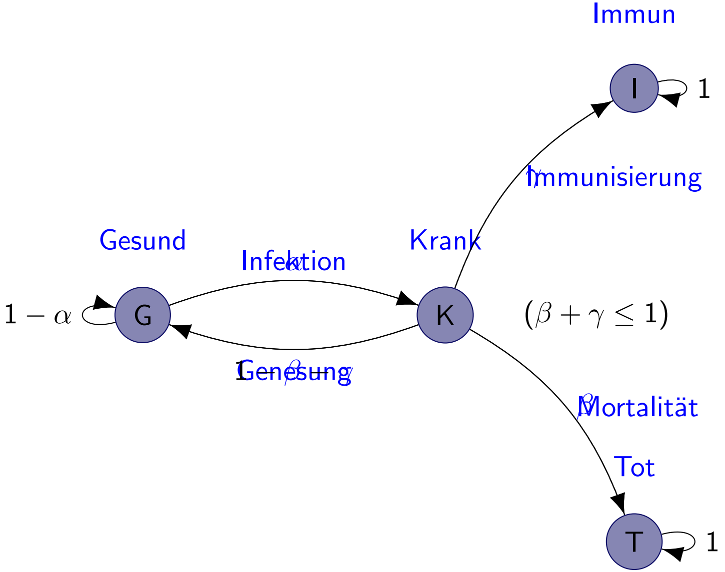
Vereinfachte Beschreibung der Auswirkung einer Krankheit auf eine Bevölkerung: Über einen gegbenen Zeitraum

- infiziert sich ein bestimmter Anteil der gesunden Bevölkerung (Infektionsrate $\alpha$),
- stirbt ein bestimmter Anteil der infizierten Bevölkerung (Mortalitätsrate $\beta$) und
- der Rest wird geheilt, wobei
- ein Teil der geheilten Bevölkerung eine Immunität entwickelt (Immunisierungsrate $\gamma$).

## Fragestellung

Wie entwickelt sich die Population, wenn alle diese Raten bekannt sind?

# Mathematisches Modell



# Mathematisches Modell

Darstellung als Kanten-gewichteter Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$

- Zustandsmenge $\mathcal{V}$
- Zustandsübergänge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
- Übergangsgewichte $\omega : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

Analog zur Adjazenzmatrix definiert man eine gewichtete Adjazenzmatrix $A_\omega \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|}$ durch

$$(A_\omega)_{v,w} = \begin{cases} \omega(v, w) & \text{falls } (v, w) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Populationsentwicklung im Modellproblem

Mit $\mathcal{V} = \{G, K, I, T\}$ erhalten wir die transponierte Adjazenzmatrix

$$A_\omega^T = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1-\beta-\gamma & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A_\omega^T$ nennen wir Übergangsmatrix von $\mathcal{G}$.
Die Entwicklung einer Population mit Startverteilung $x^{(0)}$ erhält man nun durch die Vorschrift

$$x^{(k+1)} = A_\omega^T \cdot x^{(k)}$$

Gilt wie in unserem Beispiel, dass $\omega(v, w) \geq 0$ und

$$\sum_{w \in \mathcal{V}} \omega(v, w) = 1 \quad \text{für alle} \quad v \in \mathcal{V},$$

so beschreibt $\mathcal{G}$ eine diskrete Markov-Kette. Diese sind die mathematische Beschreibung einfacher stochastischer Prozesse, die durch Zustände und Übergänge beschrieben werden.

Besonderes Interesse in der Untersuchung von Markov-Ketten gilt den sogenannten stationären Verteilungen, das heißt Vektoren $x$ für die gilt

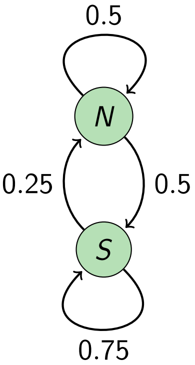
$$A_\omega^T x = x.$$

Diese sind Eigenvektoren der Adjazenzmatrix zum Eigenwert 1 und sind stabile Zustände des Systems.

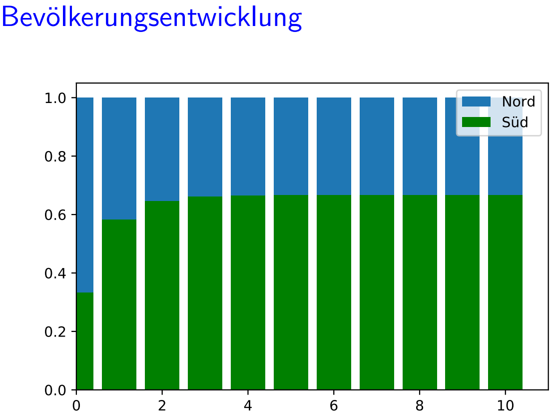
# Beispiel: Bevölkerungsmigration

Migrationsverhalten innerhalb eines Jahres:

- 50 % der Bevölkerung ziehen von Nord nach Süd
- 25 % der Bevölkerung ziehen von Süd nach Nord



# Berechnung der Entwicklung, I




Mit $\mathcal{V} = \{N, S\}$ ist die Adjazenzmatrix gegeben durch

$$A_\omega^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

# Berechnung der Entwicklung, II

Besitzt die Markov-Kette eine stationäre Verteilung unabhängig von der Startverteilung?

Diagonalisiert man $A_\omega^T$, so erhält man $A_\omega^T = UDU^{-1}$ für

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wegen $(A_\omega^T)^k = UD^kU^{-1}$ ist

$$\lim_{k\to\infty} (A_\omega^T)^k = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

und damit

$$x^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} x^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \underbrace{(x_1^{(0)} + x_2^{(0)})}_{=1}$$

unabhängig von der Anfangsverteilung $x^{(0)}$ mit $x_1^{(0)} + x_2^{(0)} = 1$.

# Potenzenmethode

## Satz (Potenzenmethode)

*Ist $A$ diagonalisierbar mit EW'en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, s.d. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, sind $x_j$ normierte EV'en zu den EW'en $\lambda_j$, $j = 1, .., n$ und ist $y_0 \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor, sodass $y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ mit $\alpha_1 \neq 0$, dann gilt für*

$\tilde{y}_m = A y_{m-1}$, $y_m = \tilde{y}_m / ||\tilde{y}_m||$, $m = 1, ..$ :

1. $y_m \to x_1$ *für* $m \to \infty$ *und*
2. $\varrho_A(y_m) \to \lambda_1$ *für* $m \to \infty$.

## Definition

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $y \in \mathbb{C}^n$. Dann nennen wir

$$\varrho_A(y) = \frac{y^H A y}{y^H y}$$

den Rayleigh-Quotienten von $A$ zum Vektor $y$.

Es konvergieren also die Rayleigh-Quotienten $\varrho_A(y_m)$ gegen $\lambda_1$ und $y_m$ gegen einen zugehörigen normierten Eigenvektor.

# Satz von Gerschgorin

## Wo liegen die Eigenwerte?

### Satz (Gerschgorin)

*Für* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *gilt*

$$\lambda(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j, \quad \mathcal{D}_j = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z - a_{jj}| < r_j\},$$

$$r_j = \sum_{l=1,\ l\neq j}^{n} |a_{lj}|$$

$\lambda(A)$ *: Menge der Eigenwerte von* $A$

Die Kreise $\mathcal{D}_j$ nennen wir Gerschgorin-Kreise.