Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Melinda Hagedorn

21.11.2024

Computergestützte Mathematik zur linearen Algebra – 7. Übungsblatt

Aufgabe 25: *(Die Hilfe verwenden)*

Verwenden Sie die Python-Hilfe, um die folgenden Aufgaben zu lösen.

(a) Wie lautet der Winkel von $2+3i$, d.h. wie lautet $\varphi \in [-\pi, \pi]$ für $2+3i = r \cdot e^{i\varphi}$? Wie erhalten wir den Radius r?

(b) Zeichnen Sie in der komplexen Ebene die Menge

$$M := \left\{ \frac{z + \frac{3}{2}i}{z - 2i} \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1 \text{ für } z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Finden Sie hierzu heraus, wie Sie auf den Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl zugreifen können.

Hinweis: Wenn Sie den gewünschten Befehl nicht kennen, sehen Sie nach, ob ein vielleicht passender englischer Befehl existiert.

Aufgabe 26: (*Erweiterung der Klasse: Polynome*)

In der Vorlesung haben Sie eine Klasse `Polynom` gesehen, die ein Dictionary mit den Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ eines Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i,\ n \in \mathbb{N}$, als Eingabe erhält. Erweitern Sie die Klasse nun um folgende Methoden:

(a) Schreiben Sie eine Methode `diff()`, die die erste Ableitung eines Polynoms p angibt.

(b) Wir wollen auch noch das Integral $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$ für $a, b \in \mathbb{R}$ auswerten können. Schreiben Sie hierzu eine passende Methode `integral(a,b)`.

(c) Testen Sie Ihre Methode am Polynom $p(x) = 3 + x + 8x^2 + 5x^4$. Geben Sie hierbei die erste Ableitung von p an und werten Sie das Integral über p in den Grenzen 0 und 1 aus.

Aufgabe 27: (*Matriz-Vektor Multiplikation*)

Seien $A = (a_{ij})_{i=0,j=0}^{m-1\ n-1}$ eine $m \times n$ Matrix und u ein Vektor der Dimension n. $a_{:,j}$ bezeichnet hier die j-te Spalte von A und $a_{i,:}$ die i-te Zeile. Die elementweise Multiplikation (Hadamard-Produkt) zwischen zwei Matrizen A und B der gleichen Dimension wird im Folgenden mit $A \odot B$ bezeichnet. Implementieren Sie die folgenden Verfahren zur Berechung von $x = Au$ und stellen Sie fest wie schnell diese sind.

(a) Berechne x mit zwei For-Schleifen.

$x = 0$ Initialisierung mit Null
for i ***von*** 0 ***bis*** $m-1$ **:**
  for j ***von*** 0 ***bis*** $n-1$ **:**
    $x_i = x_i + a_{ij}u_j$

(b) Berechne x mit einer For-Schleife als Linearkombination der Spalten von A.

$x = 0$ Initialisierung mit Null
for j ***von*** 0 ***bis*** $n-1$ **:**
  $x = x + a_{:,j}u_j$

(c) Berechne x mit einer For-Schleife. Die i-te Zeile von A wird elementweise mit u multpliziert und das Ergebnis mit `sum` oder `np.sum` aufsummiert.

$x = 0$ Initialisierung mit Null
for i ***von*** 0 ***bis*** $m-1$ **:**
  $x_i = x_i + sum(a_{i,:} \odot u)$

(d) Berechne x durch die NumPy-Matrix-Vektor-Multiplikation von A und u.

Zusatz (Für Physik-Interessierte) Sie dürfen auch die Einstein'sche Summenkonvention benutzen. Dafür steht Ihnen die Funktion `np.einsum` zur Verfügung.

Aufgabe 28: (*Bild unter linearer Abbildung in* $\mathbb{R}^3$)

Für diese Aufgabe benötigen Sie die Datei `sphere.py`, die Sie auf der Vorlesungshomepage finden.

(a) Lesen und verstehen Sie den Code. Sie sollten unter anderem die folgenden Fragen beantworten können:

- Welches Objekt wird parametrisiert und wie wird es dargestellt?
- Was macht der Befehl `quiver`?
- An welcher Stelle lässt sich die Colormap verändern und welche anderen Colormaps gibt es noch? (Hier könnte die Python-Hilfe im Internet nützlich sein.)

(b) Erweitern Sie den Code in `sphere.py` nun zu einer Funktion `plotBildSphere(A)`, die das Objekt und dessen Bild unter der von einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ induzierten linearen Abbildung

$$\boldsymbol{L_A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{L_A}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

nebeneinander plottet. Achten Sie darauf, dass Sie für die bessere Vergleichbarkeit dieselben Achsengrenzen bei beiden Plots verwenden.

(c) Testen Sie Ihre Funktion mit den folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Was bewirken die Matrizen? Zeichnen Sie hierzu den Richtungsvektor $\boldsymbol{u}$ mit Hilfe des Befehls `quiver` in den Plot der Figur unter der Abbildung $\boldsymbol{L_C}$.

Bemerkung: Wenn Sie in Spyder unter Tools - Preferences - IPython console - Graphics die Einstellung Backend auf Automatic setzen, erhalten Sie interaktive Plots. Gegebenenfalls ist ein Neustart des Kernels notwenig.

Besprechung in den Übungen vom 25.11.2024 bis 29.11.2024.