Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

14.11.2024

Computergestützte Mathematik zur linearen Algebra – 6. Übungsblatt

Aufgabe 21: *(Umgang mit Vektoren und Matrizen)*

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben mit Hilfe des `numpy`-Moduls in möglichst kurzen Befehlen. Ganze Zahlen sollen hierbei, wenn möglich, als Integer dargestellt werden.

(a) Erstellen Sie eine (5×5)-Matrix mit den Einträgen 1, 2, 3, 4 unterhalb der Diagonalen.

(b) Erstellen Sie eine (6×6)-Matrix mit Einsen in den Einträgen am Rand und Nullen im Inneren.

(c) Erstellen Sie eine (7×7)-Matrix mit Schachbrett-Muster (Einträge 0 und 1).

(d) Erstellen Sie eine Zufallsmatrix der Größe 6×6 mit natürlichen Zahlen zwischen 0 und 99. Vertauschen Sie nun die erste mit der vorletzten Zeile.

(e) Erstellen Sie einen zufälligen Vektor der Länge 10 mit natürlichen Zahlen zwischen 1 und 10. Ändern Sie nun das Vorzeichen jedes Eintrags, der echt zwischen 3 und 8 liegt.

(f) Erstellen Sie einen Zufallsvektor der Größe 10 mit Einträgen aus dem Intervall $[0, 1)$ und ersetzen Sie den größten Eintrag durch 0.

(g) Erstellen Sie einen Zufallsvektor der Größe 10 mit Einträgen aus dem Intervall $[0, 1)$ und finden Sie den Eintrag, der am nächsten an 0.5 liegt.

Hinweis: Für die Zufallsvektoren und -matrizen sind die Befehle `random.randint` und `random.rand` aus dem `numpy`-Modul hilfreich. Sehen Sie sich die Hilfeseiten der Befehle an, um genaueres über die Verwendung zu erfahren.

Aufgabe 22: *(Funktionsparameter und Plots)*

(a) Schreiben Sie eine Funktion `plotFunktion_N(f,a,b,N)`, welche die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit N äquidistanten Punkten plottet. `f` ist hierbei das Functionhandle von $f(x)$, `a`, `b` sind Floats und `N` ist ein Integer. Wird kein Wert für `N` übergeben, soll `N=300` gesetzt werden.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `plotFunktion_h(f,a,b,h)`, welche die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ so plottet, dass benachbarte Stellen, an denen geplottet wird, den Abstand h haben. Der letzte Abstand darf diese Bedingung verletzen. `f` ist hierbei das Functionhandle von $f(x)$, `a`, `b` und `h` sind Floats. Wird kein Wert für `h` übergeben, soll `h=1e-3` gesetzt werden.

(c) Testen Sie Ihre Funktionen mit

$$f(x) = 0.3x^2 - 1.7\sin(4x),$$

wobei $a = -1$, $b = 4$ und $N = 100$ bzw. $N = 300$ sowie $h = 2/11$ und $h = 10^{-3}$.

b.w.

Aufgabe 23: *(Bild unter linearer Abbildung in $\mathbb{R}^2$)*

(a) Schreiben Sie eine Funktion `plotBildAbb(A)`, die den Einheitskreis (also $K := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$), sowie das Einheitsquadrat (also $Q := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\}$) und jeweils das Bild dieser Figuren unter der von einer gegebenen Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ induzierten linearen Abbildung

$$\boldsymbol{L_A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{L_A}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

in ein gemeinsames Fenster zeichnet. Benutzen Sie `axis('equal')`.
Hinweis: Sie können die Urbildpunkte in einem $2 \times n$-Array `k` bzw. `q` speichern. Zeichnen Sie die erste gegen die zweite Zeile von `k` bzw. `q`. Die lineare Abbildung können Sie durch Matrix-Matrix-Multiplikation direkt auf alle Punkte anwenden. *Tipp für die Darstellung von Q: Verwenden Sie, wie in der Vorlesung, die Vektoren der Eckpunkte.*

(b) Erweitern Sie den Plot soweit, dass die vier Eckpunkte des Einheitsquadrats in vier unterschiedlichen Farben markiert sind. Überlegen Sie, auf welche Punkte die Eckpunkte jeweils abgebildet werden und markieren Sie diese Punkte in der dazugehörigen Farbe.

(c) Testen Sie Ihre Funktion mit den folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}_2 - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T,$$

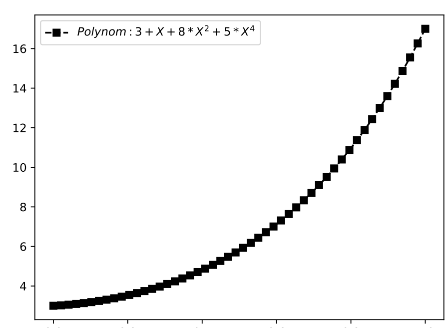
mit $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Was bewirken die Matrizen?

Aufgabe 24: *(Erweiterung der Polynomklasse)*

Unsere Klasse `Polynom` soll nun auch die Möglichkeit bieten, Polynome plotten können. Die aktuelle überarbeitete Version der Musterlösung finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

(a) Erweitern Sie die Klasse um eine Methode `plot`, die die Parameter `fig`, `ax`, `xmin`, `xmax`, `num` und `style` bekommt.
Hierbei ist `fig` ein Figure-Objekt, `ax` ein Axes-Objekt, [`xmin`, `xmax`] das Intervall, über dem geplottet wird, `num` die Anzahl der Punkte, die für den Plot verwendet wird und `style` ist ein *format string*, in dem die Farbe, die Marker und die Linienart festgelegt werden kann.
Sind keine anderen Werte gegeben, soll `fig=None`, `ax=None` gelten und ein neues Bild in einem neuen Koordinatensystem über dem Intervall $[0, 1]$ mit 50 Stützstellen geplottet werden und eine schwarze, gestrichelte Linie mit Quadraten als Marker verwendet werden.
Hinweis: Schauen Sie hierfür in die Hilfe von `plt.plot`.

(b) Fügen Sie noch eine Legende zu Ihrem Plot dazu, die mit Hilfe der bereits vorhandenden Methode `__str__` das Polynom angibt, das geplottet wird. Der Plot könnte wie folgt aussehen:



Besprechung in den Übungen vom 18.11.2024 bis 22.11.2024.