Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

16.01.2025

Computergestützte Mathematik zur linearen Algebra – 13. Übungsblatt

Aufgabe 49: (*Kompakte QR-Zerlegung, Teil 1*)

Modifizieren Sie den Algorithmus der QR-Zerlegung aus Aufgabe 48 so, dass Sie eine kompakte Version der Ausgaben erhalten. Die Funktion `QR_kompakt` soll als Eingabe wie bisher einen Array $\texttt{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, mit vollem Rang erhalten. Als Ausgabe soll jedoch ein Array `alpha` mit den Einträgen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und ein $(m \times n)$-Array der Form

$$\begin{pmatrix} | & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ | & | & \ddots & \vdots \\ v_1 & | & & r_{n-1n} \\ | & v_2 & & | \\ | & | & \ddots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad \text{mit } v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|} \in \mathbb{R}^{m-k+1} \text{ und } R = (r_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

zurückgegeben werden. Hierbei sollen Sie NICHT wie in Aufgabe 48 die Matrizen `Q` und `R` vollständig ausrechnen und daraus die entsprechenden Teile herausgreifen, sondern eine möglichst kurze Version des Algorithmus implementieren, die auf unnötige Berechnungen verzichtet.
Die Musterlösung von Aufgabe 48 wird ab Donnerstag Nachmittag auf der Homepage zur Verfügung gestellt. Die Notation in dieser Aufgabe bezieht sich auf den Pseudocode aus Aufgabe 48.

Aufgabe 50: (*Kompakte QR-Zerlegung, Teil 2*)

Gegeben seien normierte Vektoren $v_k \in \mathbb{R}^{m-k+1}$, $k = 1, \ldots, n$ mit $m \geq n$. Wir setzen

$$Q_k = \left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{Q}_k \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad \widetilde{Q}_k = I_{m-k+1} - 2\, v_k v_k^T.$$

(a) Schreiben Sie eine Funktion `QTprodb`, die als Eingabe einen Array $\texttt{b} \in \mathbb{R}^m$ und einen $(m \times n)$-Array `V` erhält, dessen Spalten die Vektoren v_k, nach oben aufgefüllt mit Nullen, sind (vgl. Aufgabe 49). Die Funktion soll das Produkt

$$Q^T b = Q_n \cdot \ldots \cdot Q_1\, b$$

auswerten, ohne dabei die Matrizen Q_k bzw. $\widetilde{Q}_k$ explizit aufzustellen.

(b) Testen Sie Ihre Implementierung unter Verwendung der Funktion `QTbTest(QTprodb)` aus dem Modul `Aufgabenkontrolle13`.

Aufgabe 51: (*Lineares Ausgleichsproblem*)

Die folgende Tabelle gibt die Weltbevölkerung in verschiedenen Jahren wieder:

Jahr	1804	1927	1960	1974	1987	1999	2012	2022
Anzahl (Mrd.)	1	2	3	4	5	6	7	8

Es wird angenommen, dass für reelle Zahlen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ der folgende lineare Zusammenhang besteht:

$$\log(\text{Anzahl}) = x_1 \text{Jahr}^2 + x_2 \text{Jahr} + x_3$$

(a) Seien $\boldsymbol{t} = (t_k)_{k=1,\ldots,8} \in \mathbb{R}^8$ der Vektor bestehend aus den Jahreszahlen und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^8$ der zugehörige Vektor der Weltbevölkerung. Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3} \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \text{ mit } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_8^2 & t_8 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \log(y_1) \\ \log(y_2) \\ \vdots \\ \log(y_8) \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der Normalengleichungen.

(b) Plotten Sie die Punkte $(t_k, y_k)_{k=1,\ldots,8}$ und die Funktion $t \mapsto e^{x_1 t^2 + x_2 t + x_3}$ auf dem Intervall $[1804, 2030]$. Welche Schätzung für das Jahr 2030 liefert das Modell?

Aufgabe 52: (*Klausuraufgabe WS18/19: Lineares Ausgleichsproblem*)

In einem Experiment wurden Datenpunkte (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 9$ gemessen und in der Datei `Aufgabe52_Daten.dat` abgespeichert.
Es wird angenommen, dass die Daten für drei Parameter α_1, α_2 und α_3 folgende Gesetzmässigkeit erfüllen:

$$f(x) = \alpha_1 \cos(\pi x) + \alpha_2 \sqrt{x} + \alpha_3 x$$

(a) Lesen Sie die Messdaten aus `Aufgabe52_Daten.dat` ein und bestimmen Sie die Parameter α_1, α_2 und α_3 so, dass die Funktion f in den Punkten x_i die Werte y_i im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestmöglich approximiert. Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung `scipy.linalg.qr` und dem Befehl `scipy.linalg.solve_triangular`.
Berechnen Sie darüber hinaus den Fehler

$$err = \left(\sum_{i=1}^{9} |y_i - f(x_i)|^2 \right)^{1/2}.$$

(b) Ergänzen Sie Ihr Skript so, dass Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) graphisch darstellt werden. Ihre Graphik sollte

- die Datenpunkte (x_i, y_i) als schwarze $*$ und
- die Funktion f, mit den in (a) berechneten Parametern α_1, α_2 und α_3, als rote durchgezogene Linie auf dem Intervall $[0, 4]$ enthalten.

Ergänzen Sie Ihre Graphik um eine aussagekräftige Legende.

Besprechung in den Übungen vom 20.01.2025 bis 24.01.2025.