1. QR-Zerlegung

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (meist $m \geq n$)

Ziel: Alternatives Verfahren zur Berechnung einer Zerlegung $A = QR$

mit $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonal

und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rechte obere Dreiecksmatrix

(Gram-Schmidt liefert schon so eine Zerlegung)

$$(r_{ij})_{i,j=1}^{m,n} = R = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{R} \\ \hline 0 \end{bmatrix}}_{n} \Big\} m \qquad \tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$r_{ij} = 0 \text{ für } i > j$$

Anwendung
- LGS
- Lineare Ausgleichsprobleme (⇝ nächste Woche)
- Eigenwerte (⇝ Numerik II)

1) Householder-Transformationen

(1.1) Definition

Für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ heißt

euklidische Norm $(v^T v)^{1/2}$

$Q = I - 2vv^T$ Householdermatrix zum Vektor v

(1.2) Satz

Sei Q eine Householdermatrix zum Vektor v

Dann gilt:

i) Q ist symmetrisch

ii) Q ist orthogonal

iii) $Qv = -v$

iv) Für $w \in \mathbb{R}^m$ mit $w^T v = 0$ gilt $Qw = w$

$\hat{=}$ w steht senkrecht auf v

Beweis

i) $Q^T = (I - 2vv^T)^T = I - 2(vv^T)^T = Q$

ii) $Q^TQ = (I - 2vv^T)(I - 2vv^T)$

$= I - 4vv^T + 4v\underbrace{v^Tv}_{=1}v^T = I$

iii) $Qv = Iv - 2v\underbrace{v^Tv}_{=1} = -v$

iv) $Qw = w - 2v\underbrace{v^Tw}_{=0} = w$

$\square$

(1.3) Geometrische Interpretation

Q beschreibt eine Spiegelung an der Hyperebene, die senkrecht auf v steht

2) Algorithmus (QR-Zerlegung)

Notation $a^{(j)}$ j-te Spalte von A $\quad A = \left[a^{(1)} \cdots a^{(n)} \right]$

$\quad \parallel$

$A[:, [j]]$

(2.1) Idee

① Suche $v_1 \in \mathbb{R}^m$ $\|v\|_2 = 1$ mit

$$Q_1 a^{(1)} = (I_m - 2 v_1 v_1^T) a^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1$$

1.te kanonische Basisvektor

Dann ist

$$Q_1 A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A^{(1)} \\ 0 & \end{array} \right] \quad \text{für } A^{(1)} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$$

② Suche $v_2 \in \mathbb{R}^{m-1}$ $\|v_2\|_2 = 1$ mit

$$\tilde{Q}_2 A^{(1)} = (I_{m-1} - 2 v_2 v_2^T) A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A^{(2)} \\ 0 & \end{array} \right]$$

und setze $$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{Q}_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Dann ist

$$Q_2 Q_1 A = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & \\ \hline \vdots & 0 & \\ & \vdots & A^{(3)} \\ 0 & 0 & \end{array} \right] \quad \text{u.s.w}$$

Nach n Schritten

$$Q_n Q_{n-1} \cdots Q_2 Q_1 A = R$$

Setze $Q := Q_1^T Q_2^T \cdots Q_n^T$

und erhalte $A = QR$

(2.2) Details

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \text{Wie wählt man } v \quad \|v\|_2 = 1$$

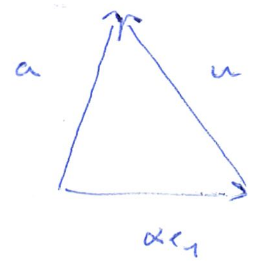
so, dass $\left(I_m - 2vv^T\right) a = \alpha e_1$?

- $\|a\|_2 = \|Qa\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha| \, \|e_1\|_2 = |\alpha|$

$\rightsquigarrow \quad \alpha = \pm \|a\|_2 \qquad$ (wähle $\alpha = -\operatorname{sign}(a_1)\|a\|_2$)

- $u := a - \alpha e_1$

$$v = \frac{u}{\|u\|_2}$$



Dann ist $\|v\|_2 = 1$

Wegen
$$\|u\|_2^2 = (a - \alpha e_1)^T (a - \alpha e_1)$$
$$= \alpha^2 - 2\alpha \, a^T e_1 + \alpha^2 = 2\alpha(\alpha - a_1)$$

und
$$u^T a = a^T a - \alpha e_1^T a = \alpha(\alpha - a_1)$$

ist
$$Qa = \left(I - 2vv^T\right) a = a - \frac{2u(u^T a)}{\|u\|_2^2}$$

$$= a - \frac{2\alpha(\alpha - a_1)}{2\alpha(\alpha - a_1)} u = a - u = \alpha e_1$$