Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Ensar Isik

05.12.2023

Numerik 2 – 9. Übungsblatt

Aufgabe 36: (QR Algorithmus mit Shifts)

Ergänzen Sie die Implementierung des QR Algorithmus ohne Shifts aus Aufgabe 32 um die Möglichkeit Shifts zu verwenden. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor.

(a) Modifizieren Sie die Funktion `qralg` derart, dass Sie einen *einfachen* Rayleigh-Shift in jeder Iteration verwenden.

(b) Modifizieren Sie die Funktion `qralg` derart, dass Sie den Wilkinson-Shift in jeder Iteration verwenden.

(c) Testen Sie alle drei Varianten Ihres Programmes (kein Shift, Rayleigh- oder Wilkinson-Shift) mit der Matrix

```
A = np.diag(np.arange(15,0,-1)) + np.ones(15)
    A = diag(15:-1:1) + ones(15,15)
```

(Python) bzw. (Matlab).

Vergleichen Sie die Konvergenzverläufe. Ist die Konvergenz linear, superlinear, quadratisch, kubisch,... ? Kann man sinnvollerweise von der "Anzahl Iterationen des QR-Algorithmus pro Eigenwert" sprechen?

Aufgabe 37:

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wobei durch $\begin{bmatrix} x & V \end{bmatrix}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sin \angle(x, y) = \frac{\|V^T y\|_2}{\|y\|_2}.$$

b.w.

Aufgabe 38:

Es sei $A = U\Sigma V^H$ die Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und

$$A_k = U \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H \quad \text{mit} \quad \Sigma_k = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$$

eine Niedrigrangapproximation an A.

(a) Zeigen Sie, dass $\|A\|_2 = \sigma_1$ gilt. Hierbei können Sie $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} \,|\, \lambda \text{ ist EW von } A^H A\}$ verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass A_k die *beste* Niedrigrangapproximation von Rang k an A ist, d.h. für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rg}(B) = k$ gilt

$$\|A - B\|_2 \geq \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

(c) Geben Sie eine Matrix an, für die Niedrigrangapproximationen keine gute Näherung liefern.

Aufgabe 39:

Sei $A = U\Sigma V^T$ die Singulärwertzerlegung einer reellen $m\times n$-Matrix A. Die positiven Diagonaleinträge von Σ seien die Einträge $\Sigma_{i,i}$ für $i = 1, \ldots, p$ mit $p \leq \min\{m, n\}$. Mit Σ^+ bezeichnen wir die Matrix, die aus Σ entsteht, indem für $i = 1, \ldots, p$ die Einträge $\Sigma_{i,i}$ durch $1/\Sigma_{i,i}$ ersetzt werden. Mit A^+ bezeichnen wir die Matrix $A^+ = V\Sigma^+U^T$, die sogenannte *Pseudoinverse* von A. Man zeige:

(a) $A^+A = (A^+A)^T, \qquad AA^+ = (AA^+)^T$

(b) $AA^+A = A, \qquad A^+AA^+ = A^+.$

(c) $A = A^{++}, \qquad (A^+)^T = (A^T)^+$

(d) Die Lösung von

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

ist durch $x^* := A^+b$ gegeben.

Besprechung in der Übung am Dienstag, 12.12.2023.