

Numerik 2 – 8. Übungsblatt

Aufgabe 32: (QR Algorithmus ohne Shifts)

Implementieren Sie den QR Algorithmus ohne Shifts aus der Vorlesung. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor.

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `HH = qralg(H, tol)`, die den ungeshifteten QR Algorithmus auf eine obere Hessenbergmatrix $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ anwendet. Brechen Sie ab, wenn der betragsmäßig größte Eintrag der unteren Nebendiagonalen kleiner als `tol` ist.
- (b) Schreiben Sie eine Funktion `ew = findeigenwerte(A, tol)`, die zunächst die obere Hessenbergform einer Matrix `A` berechnet und dann `qralg` verwendet um alle Eigenwerte von `A` zu berechnen. Speichern Sie die berechneten Eigenwerte in einem geeigneten Vektor `ew`.
- (c) Modifizieren Sie `qralg` derart, dass Sie neben `HH` einen Vektor zurückliefern, der die Werte von $|H_{n,n-1}|$ in jeder Iteration enthält. Plotten Sie dann die aneinandergereihte Konvergenzgeschichte aller Eigenwerte in einem logarithmischen Plot gegen die Anzahl an QR-Zerlegungen.
- (d) Testen Sie Ihre Implementierung mit Matrizen mit reellen Eigenwerten und der Hilbertmatrix (`hilbert` in Python bzw. `hilb` in Matlab).

Hinweis: Die Pythonfunktionen `hessenberg` und `qr` aus dem Modul `scipy.linalg` bzw. die Matlab-funktionen `hess` und `qr` dürfen Sie verwenden.

Aufgabe 33:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm-induzierte Matrixnorm. Mit $\rho(A)$ bezeichnen wir den Spektralradius von A , das heißt

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \exists v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : Av = \lambda v\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $\rho(A) \leq \|A\|$;
- (b) Für normales A gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.
- (c) Bewerten Sie die unten angegeben Antwort von ChatGPT.

Question:

can one bound the spectral radius of matrix by the norm the matrix

ChatGPT:

Yes, there is a relationship between the spectral radius of a matrix and its norm. The spectral radius of a square matrix A , denoted by $\rho(A)$, is the maximum absolute value of its eigenvalues. The norm of a matrix is a generalization of the concept of the absolute value of a number to matrices.

For any square matrix A and any vector norm $\|\cdot\|$, it holds that:

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

where $\|A\|$ is the matrix norm induced by the vector norm $\|\cdot\|$. This inequality essentially states that the spectral radius of a matrix is always less than or equal to its matrix norm.

The proof of this inequality involves the Gelfand formula and the fact that the spectral radius of a matrix is the limit of the matrix norm as the number of matrix multiplications approaches infinity.

It's important to note that while the spectral radius provides information about the behavior of the matrix under repeated multiplication, the matrix norm gives a more general measure of the size of the matrix. The specific relationship between the spectral radius and the matrix norm depends on the choice of the vector norm used to define the matrix norm.

b.w.

Aufgabe 34: (Diese Aufgabe gibt die doppelte Punktzahl.)

Zeigen Sie die Existenz der reellen Schur'schen Normalform:

Zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} R_{11} & * & * & * \\ & R_{22} & * & * \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & R_{mm} \end{bmatrix},$$

wobei jedes R_{ii} entweder skalar ist oder eine (2×2) -Matrix mit konjugiert komplexen Eigenwerten. Wie im Beweis zur Schur-Normalform, Satz (2.11), zeigt man die Aussage per Induktion. Unterscheiden Sie hierbei im Induktionsschritt die beiden Fälle:

- (1) λ ist ein reeller Eigenwert von A ,
- (2) λ ist ein echt komplexer Eigenwert von A , d.h. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Fall (1) wird analog zum Beweis von Satz 2.13 behandelt (welche Änderungen gibt es dabei?), im Fall (2) gehen Sie wie folgt vor:

- (i) Zeigen Sie, dass für $\lambda = re^{i\varphi}$ und den dazu gehörigen Eigenvektor $x = y + iz$ mit $y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$A \begin{bmatrix} y & z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix},$$

wobei die Eigenwerte der Matrix $\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$ durch $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ gegeben sind.

- (ii) Zeigen Sie, dass die Vektoren y und z linear unabhängig und ungleich 0 sind.
- (iii) Zeigen Sie, dass die Matrix $B := \begin{bmatrix} y & z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y & z \end{bmatrix}$ symmetrisch und positiv definit ist, und damit ihre Eigenwerte echt größer als 0 sind.
- (iv) Überlegen Sie sich, dass es einen Winkel ψ gibt, so dass mit der Givens-Rotationsmatrix $G = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ mit $c = \cos(\psi)$, $s = \sin(\psi)$ die Matrix B diagonalisiert werden kann, d.h. dass $G^T B G = D = \text{diag}(d_1, d_2)$, $d_1, d_2 > 0$ gilt.
- (v) Geben Sie nun mit Hilfe der vorherigen Überlegungen eine Matrix $[\tilde{y}, \tilde{z}]$, die $[\tilde{y}, \tilde{z}]^T [\tilde{y}, \tilde{z}] = I$ erfüllt, d.h. deren Spalten orthonormal sind.
- (vi) Zeigen Sie zuletzt noch, dass $[\tilde{y}, \tilde{z}]^T A [\tilde{y}, \tilde{z}]$ eine reelle (2×2) -Matrix liefert, deren Eigenwerte durch λ und $\bar{\lambda}$ gegeben sind.

Aufgabe 35:

Es seien $H = H_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und μ_k , $k = 0, 1, \dots$ gegeben. Im QR-Algorithmus mit Shift, Algorithmus 2.38, bestimmen wir H_{k+1} , $k \in \mathbb{N}_0$ gemäß

$$\begin{aligned} H_k - \mu_k I &= Q_k R_k \\ H_{k+1} &= R_k Q_k + \mu_k I. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann für $j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(Q_0 \cdot \dots \cdot Q_j) \cdot (R_j \cdot \dots \cdot R_0) = (H - \mu_0 I) \cdot \dots \cdot (H - \mu_j I).$$

Besprechung in der Übung am Dienstag, 05.12.2023.