Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ENSAR ISIK

21.11.2023

Numerik 2 – 7. Übungsblatt

Aufgabe 28:

(a) Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mit Householder-Transformationen von links auf obere Dreiecksform.

(b) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Aufgabe 29:

Gegeben sei eine beliebige nicht-singuläre (3×3)-Matrix, in der wir Nullelemente durch Multiplikation mit unitären Matrizen U_j (etwa Householder-Matrizen) von links oder rechts erzeugen möchten. Betrachten Sie die folgenden Matrixstrukturen:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Ordnen Sie jeder der drei Matrixstrukturen eine der folgenden Situationen zu und rechtfertigen Sie Ihre Aussage:

(a) Kann durch eine Folge von Multiplikationen von links mit Matrizen U_j erzeugt werden.

(b) Nicht (a), kann durch eine Folge von Multiplikationen von links und rechts mit Matrizen U_j erzeugt werden. Dabei müssen die Transformationen von links und rechts *nicht* dieselben sein.

(c) Kann nicht durch eine Folge von Multiplikationen von links und rechts mit Matrizen U_j erzeugt werden.

Aufgabe 30:

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten und Schurzerlegung $U^H AU = R$.

(a) Zeigen Sie, dass der Eigenvektor v_k zum Eigenwert r_{kk}, $k = 1, \dots, n$, der Matrix R gegeben ist durch

$$v_k = \begin{bmatrix} (r_{kk} I - \widetilde{R}_k)^{-1}\, \widetilde{r}_k \\ 1 \\ 0_{(\in \mathbb{C}^{n-k})} \end{bmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \widetilde{R}_k = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1,k-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{k-1,k-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{r}_k = \begin{bmatrix} r_{1k} \\ \vdots \\ r_{k-1,k} \end{bmatrix}.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix A seien mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezeichnet. Geben Sie mit Hilfe von (a) den Eigenvektor x zum Eigenwert λ_k an.

b.w.

Aufgabe 31: (Bauer-Fike)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar, $X^{-1}AX = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und sei μ ein näherungsweiser Eigenwert mit näherungsweisem Eigenvektor $y \in \mathbb{C}^n$ mit $\|y\|_p = 1$. Zeigen Sie, dass in jeder p-Norm

$$\min_{1\le j\le n} |\mu - \lambda_j| \le \kappa_p(X)\|r\|_p$$

gilt, wobei $r = Ay - \mu y$ der Residuenvektor ist.

Besprechung in der Übung am Dienstag, 28.11.2023.