Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ENSAR ISIK

14.11.2023

# Numerik 2 – 6. Übungsblatt

## Aufgabe 23:

Sei $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,\ n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass die *Frobenius-Norm*

$$\|A\|_F^2 := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2$$

eine Matrixnorm ist. Zeigen Sie außerdem, dass die Frobenius-Norm nicht als eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm aufgefasst werden kann.

(b) Mit $\mathrm{tr}(M) := \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ wird die *Spur* der Matrix $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^T A).$$

(c) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm submultiplikativ ist, also dass für $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ gilt

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F\ .$$

(d) Ist $\{v^1, ..., v^n\}$ eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathbb{R}^n$, so gilt $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Av^i\|_2^2$.

## Aufgabe 24:

(a) Zeigen Sie, dass eine reelle Matrix, deren Gershgorin-Kreise alle disjunkt sind, nur reelle Eigenwerte hat.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stochastische Matrix, d.h. eine Matrix mit Einträgen größer gleich 0 und jede Zeilensumme gleich 1. Zeigen Sie:

  (i) Alle Eigenwerte von $A$ sind betragsmäßig kleiner gleich 1.

  (ii) Mindestens ein Eigenwert von $A$ ist gleich 1.

## Aufgabe 25:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Schurzerlegung $U^H AU = R$ ($R$ obere Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten von $A$ auf der Diagonalen) und paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass für $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$, d.h. B kommutiert mit $A$, $U^H BU$ obere Dreiecksgestalt besitzt.

**b.w.**

**Aufgabe 26:**

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Wertebereichs $\mathcal{F}(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

(a) $\mathcal{F}(A+\alpha I) = \mathcal{F}(A) + \alpha$ und $\mathcal{F}(\alpha A) = \alpha \mathcal{F}(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Für den hermiteschen Anteil $H = \frac{1}{2}(A + A^H)$ von $A$ gilt $\mathcal{F}(H) = \mathrm{Re}(\mathcal{F}(A))$, wobei $\mathrm{Re}(\mathcal{F}(A))$ die Projektion von $\mathcal{F}(A)$ auf die reelle Achse bezeichnet.

(c) $\mathcal{F}(A+B) \subseteq \mathcal{F}(A)+\mathcal{F}(B)$ für alle $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Geben Sie ein Beispiel, für das eine echte Inklusion vorliegt.

**Aufgabe 27:**

Implementieren Sie die Potenzmethode mit Shift aus der Vorlesung. Testen Sie das Verfahren an stochastischen Matrizen, siehe Aufgabe 24.

**Besprechung in der Übung am Dienstag, 21.11.2023.**