Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ENSAR ISIK

07.11.2023

Numerik 2 – 5. Übungsblatt

Aufgabe 18:

Beweisen Sie Lemma 2.8:
Gibt es zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ein $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mit $1 \leq \operatorname{rang}(X) = k \leq n$ und ein $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ so, dass $AX = XB$, dann gilt $\mathcal{R}(AX) \subseteq \mathcal{R}(X)$ und $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$.

Aufgabe 19:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

und e_1, e_2, e_3 bezeichnen die üblichen Einheitsvektoren. Welche der folgenden Unterräume sind rechts A-invariant, welche nicht? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.

(a) $\mathcal{R}(e_1)$,

(b) $\mathcal{R}(e_2)$,

(c) $\mathcal{R}(e_3)$,

(d) $\mathcal{R}([e_1, e_2])$,

(e) $\mathcal{R}([e_2, e_3])$,

(f) $\mathcal{R}([e_1, e_2, e_3])$.

Aufgabe 20:

(a) Zeichnen Sie die Gershgorinkreise der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 1 & -4-2i & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Beweisen Sie folgende Variante des Satzes von Gershgorin:
Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Eigenwert λ gibt es einen (Spalten-)Index j so, dass

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|.$$

(c) Verkleineren Sie nun mit Hilfe von Aufgabenteil (b), soweit möglich, den in Aufgabenteil (a) markierten Bereich, so dass Sie einen möglichst kleinen Bereich in der komplexen Ebene erhalten, in dem die Eigenwerte von A liegen.

Aufgabe 21:

Zeigen Sie, dass für normale Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $z \notin \sigma(A)$ gilt

$$\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))} = ||(zI - A)^{-1}||_2.$$

Hierbei ist für $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ die Distanz $\operatorname{dist}(z, \Omega) := \inf_{x\in\Omega}\{|x - z|\}$.

Aufgabe 22:

Es sei $J_n(0)$ der Jordanblock der Dimension $n \in \mathbb{N}$ zum Eigenwert Null. Zeigen Sie, dass die Matrix $J_n(0) + \varepsilon \cdot e_n e_1^T$ die Eigenwerte $\varepsilon^{1/n}\,\omega_n^{-k}$ für $k = 1, \ldots, n$ besitzt, wobei hier wie üblich $\omega_n = \exp({}^{-2\pi i}/{}_n)$ gesetzt wird.

Besprechung in der Übung am Dienstag, 14.11.2023.