Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Ensar Isik

31.10.2023

# Numerik 2 – 4. Übungsblatt

## Aufgabe 14:

(a) Implementieren Sie einen schnellen Algorithmus, der die ersten $N+1$ Koeffizienten der Potenzreihe einer im Einheitskreis analytischen Funktion $f$, d.h. $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(f)\zeta^n$, berechnet. Die Koeffizienten $w_n(f)$ können mit Hilfe der Cauchy-Integralformel dargestellt werden, wobei über den Rand des Ursprungskreises mit Radius $\rho = \sqrt{\varepsilon}^{1/N}$ und Maschinengenauigkeit $\varepsilon > 0$ integriert wird, das heißt

$$w_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{1}{\zeta^{n+1}} f(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta \quad \text{für } n = 0, \ldots, N.$$

Unter Verwendung der Trapezregel mit äquidistanter Schrittweite mit $L = 2^{\mathrm{ceil}(\log_2(\mathrm{N}))}$ Schritten bekommen wir, wie in der Vorlesung hergeleitet, die Approximation

$$w_n(f) \approx \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} f\left(\rho e^{2\pi i l/L}\right) \omega_L^{nl}, \quad n = 0, \ldots, N.$$

(b) Schreiben Sie eine Funktion, die den Algorithmus aus (a) verwendet, um die Koeffizienten der Potenzreihe eines Produkts $fg$ zu bestimmen. Wenden Sie hierfür den Algorithmus sowohl auf die Funktion $f$ als auch auf $g$ an und überlegen Sie sich, wie Sie die Koeffizienten $w_n(fg),\ n = 0, \ldots, N$ auf eine schnelle Art aus den Koeffizienten $w_n(f),\ n = 0, \ldots, N$ und $w_n(g),\ n = 0, \ldots, N$ erhalten.

(c) Testen Sie Ihre Funktion aus (b) mit $f(\zeta) = \sqrt{\frac{1+\zeta}{2(1-\zeta)}}$ und $g(\zeta) = \sin(\zeta)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat, wenn Sie direkt den Algorithmus aus (a) auf das Produkt $fg$ anwenden.

## Aufgabe 15:

Beschreiben Sie einen schnellen Löser für die Finite Differenzen-Approximation der Helmholtzgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \ \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{auf } \ \partial\Omega \qquad \text{(Neumann-Randbedingung)}. \end{cases}$$

Die Randbedingung wird mit Hilfe von Geisterpunkten $u_{m,-1}$, $u_{m,N+1}$, $u_{-1,n}$, $u_{M+1,n}$ für $n = 0, \ldots N$, $m = 0, \ldots, M$ approximiert, in dem

$$u_{m,-1} = u_{m,1} \quad (m = 0, \ldots, M) \quad \text{auf dem Randteil } \ y = 0$$

gesetzt wird, bzw. analog auf dem Rest des Randes, und die Finite Differenzen-Approximation auch für die Randpunkte verwendet wird.

**b.w.**

**Aufgabe 16:**

Sofern nicht anders angegeben sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel für die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, dann ist $-\lambda$ ein Eigenwert von $A$.

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, dann ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von $A$.

(c) Wenn $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ ist und $A$ nichtsingulär, dann ist $\lambda^{-1}$ ein Eigenwert von $A^{-1}$.

(d) Wenn $\sigma(A) = \{0\}$, dann ist $A = 0$.

(e) Aus $AA^H = A^H A$ folgt $A = A^H$.

(f) Ist $A$ hermitesch, d.h. $A = A^H$, dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

**Aufgabe 17:**

(a) Beweisen Sie Lemma 2.6:
Sind zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ähnlich, so haben sie dasselbe charakteristische Polynom und dieselben Eigenwerte.

(b) Seien $M$ und $A$ zwei nichtsinguläre Matrizen. Die Matrix $M$ kann zerlegt werden in $M = ST$, wobei $S$ und $T$ nicht notwendigerweise untere bzw. obere Dreiecksmatrizen sind. Zeigen Sie, dass die Matrizen $M^{-1}A$, $AM^{-1}$ und $S^{-1}AT^{-1}$ dieselben Eigenwerte besitzen.

**Besprechung in der Übung am Dienstag, 07.11.2023.**