

## Numerik 2 – 3. Übungsblatt

### Aufgabe 10:

- (a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten  $\hat{f}(k)$  der  $2\pi$ -periodischen Funktion

$$f(x) = 9 \sin(3x) - 5 \cos(23x) + 2e^{-3ix} - e^{2ix}.$$

- (b) Seien die diskreten Fourierkoeffizienten  $\hat{f}_N(k)$  zur Funktion  $f$  aus (a) mittels der Approximation durch die Trapezregel gegeben. Ab welchem  $N \in \mathbb{N}$  sind die diskreten Fourierkoeffizienten  $\hat{f}_N(k)$  für  $k = \{-23, \dots, 23\}$  identisch mit den exakten Fourierkoeffizienten  $\hat{f}(k)$ ?

### Aufgabe 11:

Zeigen Sie für gerades  $N \in \mathbb{N}$ :

- (a) Für  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$  periodisch fortgesetzt gilt:  $\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k}$  für  $k \in \mathbb{Z}$ .  
(b) Falls  $x \in \mathbb{C}^N$  eine periodisch fortgesetzte gerade Folge ist (d.h.  $x_{-k} = x_k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ ), so ist auch die Fourier-Transformierte  $\hat{x}$  gerade.

**Hinweis:** Eine gerade Folge hat für gerades  $N$  die Form  $[x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N/2-1} \mid x_{N/2} \ \dots \ x_2 \ x_1]$ .

### Aufgabe 12:

Geben Sie einen schnellen Algorithmus zur Berechnung der ersten  $N = 2^L$  Koeffizienten des Produkts zweier formaler Potenzreihen  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  und  $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$  an.

### Aufgabe 13:

Seien  $a, b \in \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2^L$ , zwei Vektoren, die bei Bedarf periodisch fortgesetzt werden. Es soll das durch die Faltung  $a * x = b$  gegebene lineare Gleichungssystem nach  $x$  aufgelöst werden.

Implementieren Sie eine Funktion mit der Signatur `FaltungLGS(a,b)`, die für diese Aufgabe nur  $\mathcal{O}(N \log(N))$  Rechenoperationen benötigt. Es soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden, falls das lineare Gleichungssystem nicht lösbar ist. Die Python-Routinen zur Berechnung der FFT, sowie deren inversen FFT können Sie hierbei verwenden.

Testen Sie Ihre Implementierung an geeigneten Beispielen.