

Numerik 2 – 3. Übungsblatt

Aufgabe 10:

- (a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$ der 2π -periodischen Funktion

$$f(x) = 9 \sin(3x) - 5 \cos(23x) + 2e^{-3ix} - e^{2ix}.$$

- (b) Seien die diskreten Fourierkoeffizienten $\hat{f}_N(k)$ zur Funktion f aus (a) mittels der Approximation durch die Trapezregel gegeben. Ab welchem $N \in \mathbb{N}$ sind die diskreten Fourierkoeffizienten $\hat{f}_N(k)$ für $k = \{-23, \dots, 23\}$ identisch mit den exakten Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$?

Aufgabe 11:

Zeigen Sie für gerades $N \in \mathbb{N}$:

- (a) Für $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ periodisch fortgesetzt gilt: $\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k}$ für $k \in \mathbb{Z}$.
(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine periodisch fortgesetzte gerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte \hat{x} gerade.

Hinweis: Eine gerade Folge hat für gerades N die Form $[x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N/2-1} \mid x_{N/2} \ \dots \ x_2 \ x_1]$.

Aufgabe 12:

Geben Sie einen schnellen Algorithmus zur Berechnung der ersten $N = 2^L$ Koeffizienten des Produkts zweier formaler Potenzreihen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ und $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ an.

Aufgabe 13:

Seien $a, b \in \mathbb{R}^N$, $N = 2^L$, zwei Vektoren, die bei Bedarf periodisch fortgesetzt werden. Es soll das durch die Faltung $a * x = b$ gegebene lineare Gleichungssystem nach x aufgelöst werden.

Implementieren Sie eine Funktion mit der Signatur `FaltungLGS(a,b)`, die für diese Aufgabe nur $\mathcal{O}(N \log(N))$ Rechenoperationen benötigt. Es soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden, falls das lineare Gleichungssystem nicht lösbar ist. Die Python-Routinen zur Berechnung der FFT, sowie deren inversen FFT können Sie hierbei verwenden.

Testen Sie Ihre Implementierung an geeigneten Beispielen.