

## Numerik 2 – 2. Übungsblatt

### Aufgabe 6:

Sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische absolut integrierbare Funktion mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten  $\hat{f}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (vgl. Definition 1.12). Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel ergibt

$$\hat{f}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-int_j} \quad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie:  $\hat{f}_N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \hat{f}(n + lN)$ .

### Aufgabe 7:

Gegeben seien  $g_0, \dots, g_{N-1} \in \mathbb{R}$ . Die diskrete Cosinus-Transformation (DCT) ist definiert durch

$$(\text{DCT}_N g)_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \cos\left(\frac{(2j+1)k\pi}{2N}\right) \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zeigen Sie, dass man die DCT auch als Fouriertransformation eines geeigneten Vektors  $f \in \mathbb{R}^{2N}$  schreiben kann.

Wie lässt sich dies ausnutzen, um mittels der FFT eine schnelle Cosinus-Transformation zu entwickeln?

### Aufgabe 8:

- Sei  $x \in \mathbb{C}^N$ . Stellen Sie für  $a = (-2, 1, 0, 0, 1, 3, 2, -1)$  und  $b = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$  das zu  $a * x = b$  gehörige lineare Gleichungssystem auf.
- Geben Sie ein Verfahren (Pseudocode) an, um für gegebenes  $a \in \mathbb{C}^N$ , mit  $N = 2^L$ , die exakten Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung  $x \mapsto a * x$  zu bestimmen.

**Aufgabe 9:** Vergleichen Sie die Schnelligkeit der FFT aus Aufgabe 5 mit ein oder zwei in Python verfügbaren FFTs. (In `scipy` gibt es eine FFT Implementierung, und es gibt beispielsweise `pyFFTW`, einen Pythonwrapper zu `FFTW`.)

Messen Sie dazu für verschiedene Zweierpotenzen  $N$  die Zeit, die die Berechnung der Fouriertransformierten eines Vektors  $x \in \mathbb{C}^N$  in Anspruch nimmt und stellen Sie diese graphisch dar.