Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ENSAR ISIK

23.1.2024

Numerik 2 – 14. Übungsblatt

Aufgabe 56:

Zeigen Sie, dass die rekursive Definition der Tschebyscheff-Polynome

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

äquivalent ist zur expliziten Darstellung

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n\right].$$

Aufgabe 57:

Beim QMR-Verfahren kann man die Residuennorm $\|r_m\|$ nicht so einfach aus bekannten Größen ablesen wie bei den anderen Verfahren. Man kann jedoch die Matrix-Vektormultiplikation zur Berechnung von $r_m = b - Ax_m$ einsparen, wenn man die folgende Update-Formel für die Residuenvektoren verwendet:

$$r_m = |s_m|^2 r_{m-1} + \rho_m c_m v_{m+1}.$$

Beweisen Sie diese Rekursion in folgenden Schritten:

(a) Zeigen Sie, dass $r_m = \rho_m z_m$, wobei $z_m = V_{m+1}Q_m e_{m+1}$.
Hinweis: Verwenden Sie $x_m = V_m y_m$ mit $y_m = R_m^{-1} q_m$ und $r_m = V_{m+1}(\beta e_1 - \widetilde{T}_m y_m)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der speziellen Form von Q_m als Produkt von m Givens-Rotationen

$$Q_m e_{m+1} = -s_m \begin{bmatrix} Q_{m-1}e_m \\ 0 \end{bmatrix} + c_m e_{m+1}.$$

(c) Schließen Sie aus (b) die Rekursion

$$z_m = -s_m z_{m-1} + c_m v_{m+1}$$

und daraus mit Hilfe von $\rho_m = -\overline{s}_m \rho_{m-1}$ die Behauptung.

b.w.

Aufgabe 58:

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{und} \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

(a) Wenden Sie das CGNE-Verfahren aus Aufgabe 54 an, wobei der Startwert x_0 als der Nullvektor gewählt wird. Was kann man über die Konvergenz aussagen?

(b) Auf das Gleichungssystem kann man auch das GMRES-Verfahren mit demselben Startwert $x_0 = 0$ anwenden. Was kann man nun über die Konvergenz sagen?

Aufgabe 59:

Es sei L der Abbruchindex des Lanczos-Verfahrens. Zeigen Sie, dass sowohl aus $v_{L+1} = 0 \in \mathbb{R}^N$, als auch aus $w_{L+1} = 0 \in \mathbb{R}^N$ folgt, dass alle Eigenwerte von T_L auch Eigenwerte von A sind, d.h. dass $\sigma(T_L) \subseteq \sigma(A)$ gilt.

Besprechung in der Übung am Dienstag, 30.1.2024.