Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ENSAR ISIK

16.1.2024

Numerik 2 – 13. Übungsblatt

Aufgabe 51:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nicht-singuläre Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und x_m eine Folge von approximativen Lösungen von $Ax = b$. Zeigen Sie, dass für $x^* := A^{-1}b$, $e_m := x^* - x_m$ und $r_m := A(x^* - x_m) = Ae_m$ gilt

$$\frac{1}{\kappa(A)}\frac{\|r_m\|}{\|r_0\|} \leq \frac{\|e_m\|}{\|e_0\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r_m\|}{\|r_0\|},$$

wobei $\kappa(A)$ die Konditionszahl von A bezüglich der $\|\cdot\|$-Norm bezeichnet.

Aufgabe 52:

Beweisen Sie Satz 3.8:
Ist $AV_m = V_mH_m$ und ist $W_m^HV_m$ invertierbar, so ist $x_m = V_my_m$, wobei y_m durch (G) oder (M) charakterisiert ist, die exakte Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 53:

Beweisen Sie Lemma 3.10:
Sind $V_k = [v_1, \dots, v_k]$, $\widetilde{H}_k = (h_{ij})_{i,j=1}^{k+1,k}$ mit v_j und h_{ij} aus dem Arnoldi-Algorithmus (3.9) und e_k k-ter Einheitsvektor, dann gilt

(a) $V_k^HV_k = I_k$.

(b) $AV_k = V_{k+1}\widetilde{H}_k = V_kH_k + h_{k+1,k}v_{k+1}e_k^T$.

(c) $V_k^HAV_k = H_k$.

(d) Falls $A = A^H$, so ist $H_k = H_k^H$, d.h H_k ist tridiagonal.

Aufgabe 54:

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Leiten Sie das CGNE-Verfahren (Conjugate Gradient for Normal Equations) zur Approximation von x her, indem Sie $x = A^Tu$ substituieren und auf das resultierende Gleichungssystem für u das CG-Verfahren (Algorithmus 2.5) anwenden. Elimimieren Sie nun im CGNE-Verfahren die Variable u, sodass Sie eine Näherungsfolge $(x_k)_k$ erhalten.

Aufgabe 55:

Angenommen, das Arnoldi-Verfahren bricht in Schritt m ab, d.h. $h_{m+1,m} = 0$. Zeigen Sie, dass dann

(a) $\mathcal{K}_m(A, b)$ ein A-invarianter Unterraum ist;

(b) $\mathcal{K}_m(A, b) = \mathcal{K}_{m+1}(A, b) = \mathcal{K}_{m+2}(A, b) = \dots$, also $\dim \mathcal{K}_N(A, b) = m$ gilt.

Besprechung in der Übung am Dienstag, 23.1.2024.