Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ENSAR ISIK

9.1.2024

Numerik 2 – 12. Übungsblatt

Aufgabe 47:

Zeigen Sie: Falls $0 < c_2 < c_1 < 1$ gilt, kann es sein, dass es für eine Abstiegsrichtung $s \in \mathbb{R}^n$ mit $\|s\|_2 = 1$ einer nach unten beschränkten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ keine Schrittlänge $\alpha > 0$ gibt, die die Wolfebedingung erfüllt.

Aufgabe 48:

Sei $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist für $x, y \in \mathbb{R}^n$ durch $\langle x, y\rangle_H := x^T H y$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert, welches die Norm $\|x\|_H$ induziert.

Sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) \neq 0$ gegeben. Bestimmen Sie eine Lösung des Problems

$$\min_{d:\|d\|_H=1} \nabla f(x)^T d.$$

Warum ist damit Satz 3.6 der Vorlesung bewiesen?

Aufgabe 49:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit mit Eigenwerten $0 < \lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_1$. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ werde iterativ mit der Methode des steilsten Abstiegs unter Verwendung der optimalen Schrittweiten α_k und mit beliebigem Startwert x_0 gelöst. Mit $\widehat{x}$ bezeichen wir hierbei die exakte Lösung des Gleichungssystems und mit x_k die Iterierten des Verfahrens.

(a) Zeigen Sie, dass für die Iterierten $\widetilde{x}_k$ des Verfahrens zur Lösung von $Ax = 0$ mit Startwert $\widetilde{x}_0 = x_0 - \widehat{x}$ gilt

$$\widetilde{x}_k = x_k - \widehat{x}.$$

(b) Zeigen Sie, dass in der Norm $\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}$ für den Fehler der Iterierten gilt

$$\|x_{k+1} - \widehat{x}\|_A \leq \left(1 - \frac{2}{\kappa_2(A) + 1}\right) \|x_k - \widehat{x}\|_A,$$

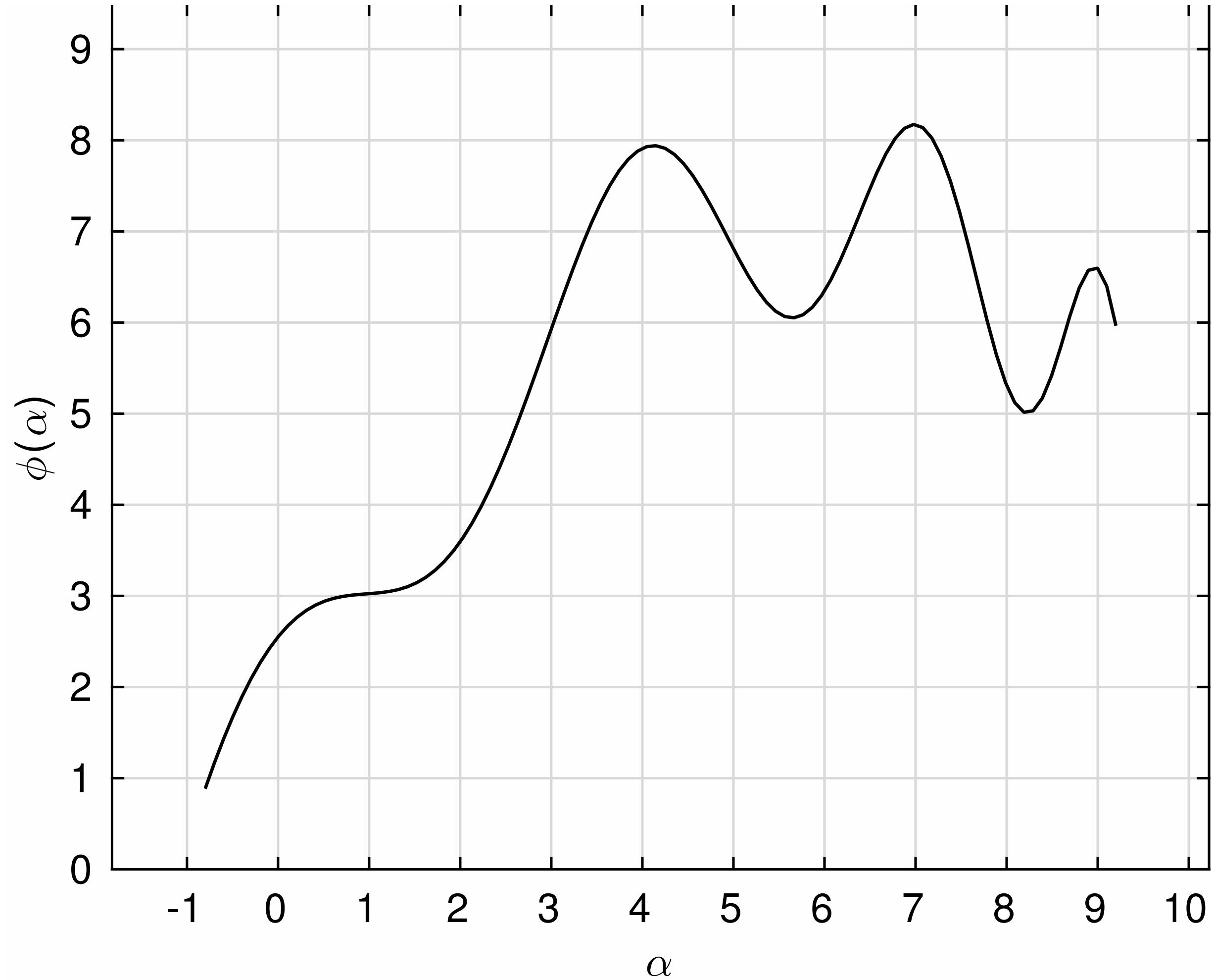
wobei $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

Aufgabe 50:

Zur Bestimmung eines lokalen **Maximums** einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann man das Verfahren des steilsten **Anstiegs** verwenden.

(a) Formulieren Sie hierfür ausgehend von der Iterierten x_k die Verfahrensvorschrift zur Berechnung von x_{k+1}. Verwenden Sie hierbei die optimale Schrittweite.

(b) Wie sollten bei einem Anstiegsverfahren die beiden Wolfebedingungen aussehen, die die zulässigen Schrittweiten bestimmen?
Skizzieren Sie für die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \varphi(\alpha) := f(x_k + \alpha s_k)$ diese beiden Wolfebedingungen für $c_1 = \frac{1}{2}$ und $c_2 = \frac{2}{3}$ in die Grafik.



Besprechung in der Übung am Dienstag, 16.1.2024.