Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Ensar Isik

20.12.2023

Numerik 2 – 11. Übungsblatt

Aufgabe 44:

Berechnen Sie für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ zu folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung.

(a) $x \mapsto \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x, \quad$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$;

(b) $x \mapsto \sum_{i=1}^m \log(\gamma_i - b_i^T x - \frac{1}{2}x^T A_i x), \quad$ für $A_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$;

(c) $x \mapsto e^{x^T Ax}, \quad$ für $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 45:

Betrachten Sie das Problem $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ für das Polynom

$$f(x) = (x_1^2 - x_2)(x_1^2 - 2x_2).$$

(a) Zeigen Sie: Für jede Richtung $d \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat die Funktion $\lambda \mapsto f(\lambda d)$ in $\lambda^* = 0$ eine strikte lokale Minimalstelle und es gilt $\lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda d) = \infty$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Punkt $x^* = 0$ ist eine Minimalstelle von f.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: $\lim_{\|x\|_2\to\infty} f(x) = \infty$.

Aufgabe 46:

(a) Implementieren Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$ durch die Minimierung des quadratischen Funktionals $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$. Verwenden Sie dazu die exakten Schrittweiten α_k aus der Vorlesung und brechen Sie die Iteration ab, falls die Norm des Gradienten kleiner als TOL ist.

(b) Testen Sie Ihre Implementierung für eine geeignete (2×2)-Matrix A und einen geeigneten Vektor b. Stellen Sie die Funktion $f(x)$ grafisch dar und zeichnen Sie den Verlauf der Iterierten ein.

(c) Testen Sie Ihre Implementierung nun auch mit der Matrix aus Kapitel (1.5.B Schneller Poissonlöser) und $b = [1, 1, \dots]^T$. Stellen Sie für jedes $N = M = 5, 10, 20$ den Verlauf der Fehler der Iterierten graphisch dar. Setzen Sie hierbei die Toleranz TOL auf 10^{-8}.

Besprechung in der Übung am Dienstag, 9.1.2024.