# Numerik 2 – 10. Übungsblatt

**Aufgabe 40:**

Für die nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ seien die beiden $QR$-Zerlegungen $A = QR$ und $A = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ gegeben, wobei $Q$ und $\widetilde{Q}$ unitär sind. Zeigen Sie, dass eine unitäre Diagonalmatrix $D$ mit $\widetilde{Q} = QD^H$ und $\widetilde{R} = DR$ existiert, deren Diagonaleinträge den Betrag 1 haben.

**Aufgabe 41:**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \overline{\beta}_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \overline{\beta}_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & & \overline{\beta}_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

eine hermitesche tridiagonale Matrix mit $\beta_i \neq 0$ für $i = 2, \ldots, n$.
Zeigen Sie: Setzt man

$$A_1 = (\alpha_1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \overline{\beta}_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & \\ \overline{\beta}_2 & \alpha_2 & \beta_3 \\ & \overline{\beta}_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

und definiert $p_k(\lambda) := \det(A_k - \lambda I)$ und $p_0(\lambda) := 1$, so erhält man die folgende Rekursion

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= \alpha_1 - \lambda \\ p_k(\lambda) &= (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) - |\beta_k|^2 p_{k-2}(\lambda) \quad \text{für} \quad k = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

**Aufgabe 42:**

Zeigen Sie, dass für die $p_n(\lambda)$ aus Aufgabe 42 und $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $p_{k-1}(\widehat{\lambda})\, p_{k+1}(\widehat{\lambda}) < 0$, falls $p_k(\widehat{\lambda}) = 0$ für ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

(b) $p_n'(\widehat{\lambda})\, p_{n-1}(\widehat{\lambda}) < 0$, falls $p_n(\widehat{\lambda}) = 0$;

**Hinweis:** Zeigen Sie für (b), dass die Nullstellen von $p_k$ reell und einfach sind und die Nullstellen von $p_{k-1}$ trennen. Hierfür ist (a) nützlich.

**Aufgabe 43:**

Zeigen Sie: Ist für die in Aufgabe 41 definierten Polynome

$$\omega(\lambda) = \text{ Anzahl der Vorzeichenwechsel von } (p_0(\lambda), p_1(\lambda), \ldots, p_n(\lambda)),$$

so besitzt das Polynom $p_n(\lambda)$ im Interval $[a, b)$ genau $\omega(b) - \omega(a)$ Nullstellen.

(Ist $p_k(\lambda) = 0$ so definiert man $\operatorname{sign}(p_k(\lambda)) = \operatorname{sign}(p_{k-1}(\lambda))$.)

**Besprechung in der Übung am Dienstag, 19.12.2023.**