Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Ensar Isik

12.10.2023

Numerik 2 – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei $V := \operatorname{span}\{e^{ikx} \mid k = -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2}\}$ mit geradem N. Zeigen Sie:

(a)
$$((f,g)) := \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\overline{g(x_j)} \quad \text{mit} \quad x_j = \frac{2\pi j}{N}$$

ist eine hermitesche Bilinearform (d.h. Sesquilinearform) auf V mit

$$((e^{ijx}, e^{ikx})) = \begin{cases} N, & \text{für } j,k \in \mathbb{Z} \text{ und } j-k = lN \text{ für } l \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) $((\cdot,\cdot))$ ist ein Skalarprodukt auf V.

(c) $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}}$, $k = -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2}$, bilden eine Orthonormalbasis bezüglich des $((\cdot,\cdot))$-Skalarprodukts.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die diskrete Faltung kommutativ und assoziativ ist.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass für eine absolut summierbare Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und ihre Fouriertransformierte $\hat{c}(t)$ die folgenden Aussagen aus Lemma 1.11 erfüllt sind:

(a) $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\hat{c}(t)\,\mathrm{d}t,$

(b) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{c}(t)|^2\,\mathrm{d}t$

Aufgabe 4:

Es sei f eine 2π-periodische, absolut integrierbare Funktion mit Fourier-Koeffizienten α_k, $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten von $f(\cdot - s)$ für festes $s \in \mathbb{R}$ durch $\beta_k = e^{-iks}\alpha_k$ gegeben sind.

Aufgabe 5:

Implementieren Sie für $N = 2^L$ die schnelle Fouriertransformation eines Vektors $x \in \mathbb{C}^N$. Dabei sollen die benötigten ω_N^k für $k = 0, \ldots, N/2 - 1$ nur einmal zu Anfang außerhalb der Funktion berechnet und dieser dann zusammen mit dem Argument x übergeben werden.
Überlegen Sie sich einen geeigneten Test um Ihre Funktion zu überprüfen.

Besprechung in der Übung am Dienstag, 17.10.2023.