Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Ensar Isik

01. Februar 2023

Numerik 2 – Quickyblatt

[wahr | falsch]

Aufgabe 1: (I. Fouriertransformation)

Im Folgenden sei N eine Zweierpotenz.

1. Die Berechnung der inversen Fouriertransformation benötigt doppelt so viele Operationen wie die der Fouriertransformation. [|]
2. Falls $x \in \mathbb{R}^N$, so gilt $\mathcal{F}_N(x) \cdot \frac{1}{N}\mathcal{F}_N(x) = 1$. [|]
3. Sei $x \in \mathbb{C}^N$. Es gilt: $\max_{k=1\ldots N}(|x_k|) = \max_{k=1\ldots N}(|\mathcal{F}_N(x)_k|)$. [|]
4. Die Berechnung der schnellen Fouriertransformation benötigt $\mathcal{O}(\sqrt{N}\log N)$ Operationen. [|]
5. Die Fouriertransformation ist eine lineare Abbildung. [|]
6. Für die Faltung zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^N$ gilt $x * y = y * x$. [|]
7. Mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation kann man die Faltung zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^N$ mit $\mathcal{O}(N\log^2(N))$ Operationen berechnen. [|]
8. Die schnelle Fouriertransformation berechnet die Fouriertransformierte eines Vektors $x \in \mathbb{C}^N$ mit einem Fehler von $\mathcal{O}(\frac{1}{N})$. [|]
9. Die Fourierkoeffizienten einer glatten Funktion bilden eine Nullfolge. [|]
10. Die trigonometrische Interpolation der Funktion $x \mapsto x^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$ in den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$ ist exakt. [|]
11. Sind mindestens zwei Einträge des Vektors $a \in \mathbb{C}^N$ verschieden, so ist die lineare Abbildung $x \mapsto a * x$ invertierbar. [|]

b.w.

Aufgabe 2: (II. Eigenwertprobleme)

Wenn nicht anders angegeben, gilt $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. Die Eigenwerte einer reellen Matrix sind reell. [|]

2. Jede Matrix A ist unitär ähnlich zu einer Matrix in Schurnormalform. [|]

3. Hat A den Eigenwert 0, dann ist $A - I$ invertierbar. [|]

4. In jedem Gershgorinkreis der Matrix A liegt mindestens ein Eigenwert. [|]

5. Seien λ_{min} und λ_{max} der kleinste bzw. größte Eigenwert zu A und ist $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so gilt: $\lambda_{min} \leq \rho_A(x) \leq \lambda_{max}$ [|]

6. Symmetrische Matrizen sind unitär diagonalisierbar. [|]

7. Zu A sei v Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann gilt für den Rayleighquotienten $\rho_A(v) = \lambda$. [|]

8. Bei der Potenzenmethode muss in jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. [|]

9. Die Potenzenmethode konvergiert gegen den Eigenvektor v_1, falls der zugehörige Eigenwert λ_1 einfach ist und $\lambda_1 = \max\{|\lambda_i| \ : \ \lambda_i \in \sigma(A)\}$ gilt. [|]

10. Die inverse Potenzenmethode mit Shift soll die Konvergenz beschleunigen. [|]

11. Ist A in oberer Hessenbergform, so bleibt diese in jedem Schritt des QR-Algorithmus erhalten. [|]

12. Durch $2 \cdot n$ Housholder Tranformationen kann man jede Matrix A auf Hessenberg Form transformieren. [|]

13. Unter geeigneten Voraussetzungen berechnet das QR-Verfahren eine Approximation an die Schurnormalform. [|]

b.w.

Aufgabe 3: (III. Minimierung) ⋆⋆ Wenn nicht anders angegeben, gilt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ⋆⋆

1. Jede nichtlineare, beschränkte, stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat mindestens ein lokales Minimum. [|]

2. Das globale Minimum einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist eindeutig. [|]

3. Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist ein globales Minimum ein stationärer Punkt. [|]

4. Die Wolfe-Bedingungen bei einem Abstiegsverfahren zur Minimieriung einer Funktion f garantieren eine Reduktion des Funktionswertes in jedem Iterationsschritt. [|]

5. Das CG-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ für eine hermitesche, positiv definite Matrix ist ein Abstiegsverfahren zur Minimierung von $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$. [|]

6. Das Verfahren des steilsten Abstiegs angewendet auf $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$ unter Verwendung der optimalen Schrittweiten erzeugt Suchrichtungen, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. [|]

7. Für eine positiv definite Matrix A und einen Vektor $b \neq 0$ ist der Krylovraum $\mathcal{K}_k(A, b)$ ein Vektorraum. [|]

8. Für eine positiv definite Matrix A und einen Vektor $b \neq 0$ hat der Krylovraum $\mathcal{K}_k(A, b)$ die Dimension k. [|]

b.w.

Aufgabe 4: (IV. Iterative Lösung großer linearer Gleichungssysteme)

1. Für eine positiv definite Matrix A und einen Vektor $b \neq 0$ ist der Krylovraum $\mathcal{K}_k(A, b)$ ein Vektorraum. [|]

2. Für eine positiv definite Matrix A und einen Vektor $b \neq 0$ hat der Krylovraum $\mathcal{K}_k(A, b)$ die Dimension k. [|]

3. Das Arnoldiverfahren erzeugt eine orthonormale Basis von $\mathcal{K}_k(A, b)$. [|]

4. Der Vektor $b + Ab$ ist immer ein Element von $\mathcal{K}_2(A, b)$. [|]

5. Ist V_k eine Basis von $\mathcal{K}_k(A, b)$ so gilt $AV_k = V_{k+1}H$ für eine Basis V_{k+1} von $\mathcal{K}_{k+1}(A, b)$ und eine geeignete Matrix H. [|]

6. Ist V_k eine Basis von $\mathcal{K}_k(A, b)$ und $AV_k = V_k B$ für eine geeignete Matrix B, so ist $A^{-1}b \in \mathcal{K}_k(A, b)$. [|]

7. Der Fehler $\|x^* - x_k\|_A$ des cg-Verfahrens zur Lösung von $Ax = b$ für eine symmetrisch positiv definite Matrix A fällt monoton. [|]

8. Mit GMRES und FOM bestimmt man für ein k eine Näherungslösung $\widetilde{x}_k$ von $Ax = b$ mit $\widetilde{x}_k \in \mathcal{K}_k(A, b)$. [|]

9. Mit QMR und BiCG bestimmt man für ein k eine Näherungslösung $\widetilde{x}_k$ von $Ax = b$ mit $\widetilde{x}_k \in \mathcal{K}_k(A, b)$. [|]

10. Beim GMRES Verfahren löst man ein lineares Ausgleichsproblem. [|]

11. Beim QMR Verfahren löst man ein lineares Ausgleichsproblem. [|]

12. Die Folge der Normen der Residuen beim GMRES Verfahren ist monoton fallend. [|]

13. Das Lanczosverfahren erzeugt eine orthonormale Basis von $\mathcal{K}_k(A, b)$. [|]

14. Das Lanczosverfahren erzeugt eine Basis von $\mathcal{K}_k(A, b)$. [|]

15. Das Lanczosverfahren erzeugt eine Basis von $\mathcal{K}_k(A^H, c)$ für ein geeignetes c. [|]