QR-Zerlegung

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad m \geq n$

Ziel: Zerlegung $A = QR$
mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$
und rechten oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad r_{ij} = 0 \text{ für } i > j$$

Anwendung:
- LGS
- Lineare Ausgleichsprobleme ↦ Januar
- Eigenwerte ↦ Numerik II

1) Householder Transformationen

(1.1) <u>Definition</u>
Für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ heißt
$Q = I - 2vv^T$ Householdermatrix zum Vektor v

(1.2) <u>Satz</u> $\qquad$ euklidische Norm $\sqrt{v^Tv}$
Für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ sei $Q = I - 2vv^T$
Dann gilt
i) Q ist symmetrisch
ii) Q ist orthogonal
iii) $Qv = -v$
iv) $Qw = w \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$ mit $w^Tv = 0$

Beweis i) $Q^T = (I - 2vv^T)^T = I - 2(vv^T)^T = Q$
ii) $Q^TQ = (I - 2vv^T)(I - 2vv^T) =$

$$I - 4vv^T + 4v\underbrace{v^Tv}_{=1}v^T = I$$

iii) $Qv = Iv - 2v\underbrace{v^Tv}_{1} = -v$

iv) $Qw = w - 2v\underbrace{v^Tw}_{=0} = w$

$\square$

(1.3) Geometrische Interpretation

Q beschreibt eine Spiegelung an der Hyperebene die senkrecht auf v steht

2) Algorithmus der QR-Zerlegung

$A = \left[a^{(1)} \dots a^{(n)} \right]$

$a^{(j)}$ j-te Spalte von A

(2.1) Grundidee

① Suche $v_1 \in \mathbb{R}^m$ $\|v_1\| = 1$ so dass

$$Q_1 a^{(1)} = (I - 2v_1v_1^T)\, a^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1$$

Dann ist

$$Q_1 A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \\ \hline 0 & \\ \vdots & A^{(1)} \\ 0 & \end{array}\right] \quad \text{für } A^{(1)} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$$

② Suche $v_2 \in \mathbb{R}^{m-1}$ $\|v_2\| = 1$ so, dass

$$\tilde{Q}_2 A^{(1)} = (I_{m-1} - 2v_2v_2^T)\, A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & x \\ \hline 0 & \\ \vdots & A^{(2)} \\ 0 & \end{array}\right]$$

und setze $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \tilde{Q}_2 \end{bmatrix}$

Dann ist

$$Q_2 Q_1 A = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & x & x \\ 0 & \alpha_2 & \\ \hline \vdots & 0 & \\ & \vdots & A^{(2)} \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

usw

Nach n Schritten

$$Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1 A = R$$

Setze $Q := Q_1^T Q_2^T \cdots Q_n^T \Rightarrow A = QR$

(2.2) Details

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Wie wählt man v $\|v\| = 1$

so dass $(I - 2vv^T)\, a = \kappa_1 e_1$

- $\|a\| = \|Qa\| = \|\kappa e_1\| = |\kappa|\,\|e_1\| = |\kappa|$

$\Rightarrow \kappa = \pm \|a\|$ (Wähle $\kappa = -\operatorname{sign}(a_1)\|a\|_2$)

- $u := a - \kappa e_1$ $v = \dfrac{u}{\|u\|_2}$

Dann ist $\|v\| = 1$

Wegen $\|u\|_2^2 = \langle a - \kappa e_1, a - \kappa e_1 \rangle_2$

$$= \kappa^2 - 2\kappa \langle a, e_1 \rangle + \kappa^2 = 2\kappa(\kappa - a_1)$$

und $\langle u, a \rangle = \langle a, a \rangle - \kappa \langle e_1, a \rangle = \kappa(\kappa - a_1)$

ist

$$Qa = (I - 2vv^T)\, a = a - \frac{2u\overbrace{u^T a}^{=\langle u, a \rangle}}{\|u\|_2^2}$$

$$= a - \frac{2\kappa(\kappa - a_1)}{2\kappa(\kappa - a_1)}\, u = a - u = \kappa e_1$$