Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

16.11.2021

23	24	25	26	Σ

NAME: ____________________

Numerik II – 6. Übungsblatt

Aufgabe 23:

(a) Zeigen Sie, dass eine reelle Matrix, deren Gershgorin-Kreise alle disjunkt sind, nur reelle Eigenwerte hat.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stochastische Matrix, d.h. eine Matrix mit Einträgen größer gleich 0 und jede Zeilensumme gleich 1. Zeigen Sie:

(i) Alle Eigenwerte von A sind betragsmäßig kleiner gleich 1.

(ii) Mindestens ein Eigenwert von A ist gleich 1.

Aufgabe 24:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Schurzerlegung $U^H AU = R$ (R obere Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten von A auf der Diagonalen) und paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass für $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$, d.h. B kommutiert mit A, $U^H BU$ obere Dreiecksgestalt besitzt.

Aufgabe 25:

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Wertebereichs $\mathcal{F}(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

(a) $\mathcal{F}(A + \alpha I) = \mathcal{F}(A) + \alpha$ und $\mathcal{F}(\alpha A) = \alpha\mathcal{F}(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Für den hermiteschen Anteil $H = \frac{1}{2}(A + A^H)$ von A gilt $\mathcal{F}(H) = \mathrm{Re}(\mathcal{F}(A))$, wobei $\mathrm{Re}(\mathcal{F}(A))$ die Projektion von $\mathcal{F}(A)$ auf die reelle Achse bezeichnet.

(c) $\mathcal{F}(A+B) \subseteq \mathcal{F}(A)+\mathcal{F}(B)$ für alle $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Geben Sie ein Beispiel, für das eine echte Inklusion vorliegt.

Aufgabe 26:

Implementieren Sie die Potenzmethode mit Shift aus der Vorlesung. Testen Sie das Verfahren an stochastischen Matrizen, siehe Aufgabe 23.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 23.11.2021 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 23.11.2021, 8:30 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.