Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

09.11.2021

19	20	21	22	Σ

NAME: ____________________

Numerik II – 5. Übungsblatt

Aufgabe 19:

(a) Zeichnen Sie die Gershgorinkreise der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 1 & -4-2i & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Beweisen Sie folgende Variante des Satzes von Gershgorin:
Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Eigenwert λ gibt es einen (Spalten-)Index j so, dass

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|.$$

(c) Verkleineren Sie nun mit Hilfe von Aufgabenteil (b), soweit möglich, den in Aufgabenteil (a) markierten Bereich, so dass Sie einen möglichst kleinen Bereich in der komplexen Ebene erhalten, in dem die Eigenwerte von A liegen.

Aufgabe 20:

Zeigen Sie, dass für normale Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $z \notin \sigma(A)$ gilt

$$\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))} = ||(zI - A)^{-1}||_2.$$

Hierbei ist für $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ die Distanz $\operatorname{dist}(z, \Omega) := \inf_{x\in\Omega}\{|x - z|\}$.

Aufgabe 21:

Es sei $J_n(0)$ der Jordanblock der Dimension $n \in \mathbb{N}$ zum Eigenwert Null. Zeigen Sie, dass die Matrix $J_n(0) + \varepsilon \cdot e_n e_1^T$ die Eigenwerte $\varepsilon^{1/n}\,\omega_n^{-k}$ für $k = 1, ..., n$ besitzt, wobei hier wie üblich $\omega_n = \exp({-2\pi i}/{n})$ gesetzt wird.

b.w.

Aufgabe 22:

Sei $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,\ n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass die *Frobenius-Norm*

$$\|A\|_F^2 := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2$$

eine Matrixnorm ist. Zeigen Sie außerdem, dass die Frobenius-Norm nicht als eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm aufgefasst werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm submultiplikativ ist, also dass für $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ gilt

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F \ .$$

(c) Ist $\{v^1, ..., v^n\}$ eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathbb{R}^n$, so gilt $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|Av^i\|_2^2$.

(d) Mit $\mathrm{tr}(M) := \sum_{i=1}^n m_{ii}$ wird die *Spur* der Matrix $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^TA)$$

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 16.11.2021 zu Beginn der Vorlesung.