Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

02.11.2021

14	15	16	17	18	Σ

NAME: ____________________

Numerik II – 4. Übungsblatt

Aufgabe 14:

Seien $a, b \in \mathbb{R}^N$, $N = 2^L$, zwei Vektoren, die bei Bedarf periodisch fortgesetzt werden. Es soll das durch die Faltung $a * x = b$ gegebene lineare Gleichungssystem nach x aufgelöst werden.

Implementieren Sie eine Funktion mit der Signatur `FaltungLGS(a,b)`, die für diese Aufgabe nur $\mathcal{O}(N \log(N))$ Rechenoperationen benötigt. Es soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden, falls das lineare Gleichungssystem nicht lösbar ist. Die Python-Routinen zur Berechnung der FFT, sowie deren inversen FFT können Sie hierbei verwenden.

Testen Sie Ihre Implementierung an geeigneten Beispielen.

Aufgabe 15:

Sofern nicht anders angegeben sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel für die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und λ ein Eigenwert von A, dann ist $-\lambda$ ein Eigenwert von A.

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und λ ein Eigenwert von A, dann ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

(c) Wenn λ ein Eigenwert von A ist und A nichtsingulär, dann ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

(d) Wenn $\sigma(A) = \{0\}$, dann ist $A = 0$.

(e) Aus $AA^H = A^H A$ folgt $A = A^H$.

(f) Ist A hermitesch, d.h. $A = A^H$, dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 16:

(a) Beweisen Sie Lemma 2.4:
Sind zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ähnlich, so haben sie dasselbe charakteristische Polynom und dieselben Eigenwerte.

(b) Seien M und A zwei nichtsinguläre Matrizen. Die Matrix M kann zerlegt werden in $M = ST$, wobei S und T nicht notwendigerweise untere bzw. obere Dreiecksmatrizen sind. Zeigen Sie, dass die Matrizen $M^{-1}A$, AM^{-1} und $S^{-1}AT^{-1}$ dieselben Eigenwerte besitzen.

Aufgabe 17:

Beweisen Sie Lemma 2.6:
Gibt es zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ein $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mit $1 \le \operatorname{rang}(X) = k \le n$ und ein $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ so, dass $AX = XB$, dann gilt $\mathcal{R}(AX) \subseteq \mathcal{R}(X)$ und $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$.

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

und e_1, e_2, e_3 bezeichnen die üblichen Einheitsvektoren. Welche der folgenden Unterräume sind rechts A-invariant, welche nicht? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.

(a) $\mathcal{R}(e_1)$,

(b) $\mathcal{R}(e_2)$,

(c) $\mathcal{R}(e_3)$,

(d) $\mathcal{R}([e_1, e_2])$,

(e) $\mathcal{R}([e_2, e_3])$,

(f) $\mathcal{R}([e_1, e_2, e_3])$.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 09.11.2021 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 09.11.2021, 8:30 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.