Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

26.10.2021

10	11	12	13	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik II – 3. Übungsblatt

Aufgabe 10:

Zeigen Sie für gerades $N \in \mathbb{N}$:

(a) Für $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ periodisch fortgesetzt gilt: $\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine periodisch fortgesetzte gerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ gerade.

Hinweis: Eine gerade Folge hat für gerades N die Form $[x_0\ x_1\ \cdots x_{N/2-1} \mid x_{N/2}\ \cdots x_2\ x_1]$.

Aufgabe 11: (Zweidimensionale FFT)

Einer stetigen Funktion $f : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{C}$ kann man entsprechend dem eindimensionalen Fall eine formale zweidimensionale Fourierreihe

$$f(\theta, \phi) \sim \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k}\, \mathrm{e}^{i(j\theta + k\phi)}$$

zuordnen, wobei die Koeffizienten $\alpha_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{Z}$ durch

$$\alpha_{j,k} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} f(\theta, \phi)\, \mathrm{e}^{-i(j\theta + k\phi)}\, \mathrm{d}(\theta, \phi)$$

gegeben sind.

Im Folgenden sei N gerade.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten des (zweidimensionalen) trigonometrischen Polynoms

$$t_N(\theta, \phi) = \frac{1}{N^2} \sum_{j,k=1-N/2}^{N/2} \widehat{\alpha}_{j,k}\, \mathrm{e}^{i(j\theta + k\phi)},$$

das die Interpolationsaufgabe

$$t_N(\theta_k, \theta_l) = f(\theta_k, \theta_l), \qquad k, l = 0, \dots, N-1$$

mit den Abszissen $\theta_k = 2k\pi/N$ löst.

(b) Es sei $Y = (f(\theta_k, \theta_l))_{k,l=0}^{N-1}$ die $N \times N$-Matrix der zu interpolierenden Funktionswerte von f.

Zeigen Sie, dass eine geeignete Anordnung der Koeffizienten $\widehat{\alpha}_{j,k}$ aus (a) in einer $N \times N$-Matrix C existiert, so dass

$$C = FYF,$$

wobei F die Fouriermatrix, $F = (\omega_N^{kl})_{k,l=0}^{N-1}$ mit $\omega_N = \mathrm{e}^{-2\pi i/N}$, ist.

b.w.

Aufgabe 12:

Geben Sie einen schnellen Algorithmus zur Berechnung der ersten N Koeffizienten des Produkts zweier formaler Potenzreihen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ und $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ an.

Aufgabe 13: (Differentiation gestörter Daten)

Zu einer gegebenen (gestörten) 2π–periodischen Funktion b möchte man eine geglättete Ableitung berechnen. Zeigen Sie: Die Lösung u (u 2π-periodisch, mit $\int_0^{2\pi} u(t)\ \mathrm{d}t = 0$) des Minimierungsproblems

$$\int_0^{2\pi} |U(x) - b(x)|^2\ \mathrm{d}x + \alpha \int_0^{2\pi} |u''(x)|^2\ \mathrm{d}x = \min!, \qquad \alpha > 0,$$

mit U Stammfunktion von u ($U' = u$) ist gegeben durch die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{u}(n) = \frac{1}{1 + \alpha n^6}\, i\, n\, \widehat{b}(n)\ .$$

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 02.11.2021 zu Beginn der Vorlesung.