Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

19.10.2021

6	7	8	9	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik II – 2. Übungsblatt

Aufgabe 6:

Sei f eine 2π-periodische absolut integrierbare Funktion mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n),\ n \in \mathbb{Z}$ (vgl. Definition 3.3). Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel ergibt

$$\hat{f}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-int_j} \qquad \text{mit} \qquad t_j = \frac{2j+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie: $\hat{f}_N(n) = \sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \hat{f}(n + lN)$.

Aufgabe 7:

Gegeben seien $g_0, \dots, g_{N-1} \in \mathbb{R}$. Die diskrete Cosinus-Transformation (DCT) ist definiert durch

$$(DCT_N\, g)_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \cos\left(\frac{(2j+1)k\pi}{2N}\right) \qquad \forall k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zeigen Sie, dass man die DCT auch als Fouriertransformation eines geeigneten Vektors $f \in \mathbb{R}^{2N}$ schreiben kann.

Wie lässt sich dies ausnutzen, um mittels der FFT eine schnelle Cosinus-Transformation zu entwickeln?

Aufgabe 8:

(a) Sei $x \in \mathbb{C}^N$. Stellen Sie für $a = (-2, 1, 0, 0, 1, 3, 2, -1)$ und $b = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$ das zu $a * x = b$ gehörige lineare Gleichungssystem auf.

(b) Geben Sie ein Verfahren (Pseudocode) an, um für gegebenes $a \in \mathbb{C}^N$, mit $N = 2^L$, die exakten Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $x \mapsto a * x$ zu bestimmen.

Aufgabe 9:

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$ der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = 9\sin(3x) - 5\cos(23x) + 2e^{-3ix} - e^{2ix}.$$

(b) Seien die diskreten Fourierkoeffizienten $\hat{f}_N(k)$ zur Funktion f aus (a) mittels der Approximation durch die Trapezregel gegeben. Ab welchem $N \in \mathbb{N}$ sind die diskreten Fourierkoeffizienten $\hat{f}_N(k)$ für $k = \{-23, \dots, 23\}$ identisch mit den exakten Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$?

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 26.10.2021 zu Beginn der Vorlesung.