

Numerik II – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei $V := \text{span}\{e^{ikx} \mid k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}\}$ mit geradem N . Zeigen Sie:

(a)

$$((f, g)) := \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \overline{g(x_j)} \quad \text{mit} \quad x_j = \frac{2\pi j}{N}$$

ist eine hermitesche Bilinearform (d.h. Sesquilinearform) in V mit

$$((e^{ijx}, e^{ikx})) = \begin{cases} N, & \text{für } j, k \in \mathbb{Z} \text{ und } j - k = lN \text{ für } l \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) $((\cdot, \cdot))$ ist ein Skalarprodukt in V .

(c) $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}}, k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$, bilden eine Orthonormalbasis bezüglich des $((\cdot, \cdot))$ -Skalarprodukts.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die diskrete Faltung kommutativ und assoziativ ist.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass für eine absolut summierbare Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und ihre Fouriertransformierte $\hat{c}(t)$ die folgenden Aussagen aus Lemma 3.2 erfüllt sind:

(a) $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \hat{c}(t) dt,$

(b) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{c}(t)|^2 dt$

Aufgabe 4:

Es sei f eine 2π -periodische, absolut integrierbare Funktion mit Fourier-Koeffizienten $\alpha_k, k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten von $f(\cdot - s)$ für festes $s \in \mathbb{R}$ durch $\beta_k = e^{-iks} \alpha_k$ gegeben sind.

Aufgabe 5:

Implementieren Sie für $N = 2^L$ die schnelle Fouriertransformation eines Vektors $x \in \mathbb{C}^N$. Dabei sollen die benötigten ω_N^k für $k = 0, \dots, N/2 - 1$ nur einmal zu Anfang außerhalb der Funktion berechnet und dieser dann zusammen mit dem Argument x übergeben werden.

Überlegen Sie sich einen geeigneten Test um Ihre Funktion zu überprüfen.

Bemerkungen:

Pro Aufgabe gibt es sechs Punkte.

Bitte schreiben Sie auf jeden abgegebenen Übungszettel *lesbar* Namen und Matrikelnummer. Die Abgabe der Zettel erfolgt in der Vorlesung.

Zulassungsvoraussetzung für die Prüfung:

- Sie müssen mindestens 40% der Übungspunkte erreichen.
- Weiterhin müssen Sie mindestens drei (Teil-)Aufgaben in der Übungsgruppe vorrechnen.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 19.10.2021 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 19.10.2021, 8:30 Uhr an marina.fischer@uni-duesseldorf.de.