Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. CHRISTOPH MATERN

25.11.2021

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 7. Übungsblatt

Aufgabe 25:

Für $\varepsilon > 0$ ist die Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x = \varepsilon$ gegeben. Lösen Sie diese Gleichung symbolisch. Sie erhalten drei verschiedene, von ε abhängige Lösungen. Bestimmen Sie bei allen Lösungen den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$.

Der Satz von Rouché, der allerdings erst in der Funktionentheorie gezeigt werden wird, besagt, dass diese Grenzwerte die Lösungen der Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x = 0$ sind. Bestätigen Sie das, indem Sie einerseits jeweils den Real- und Imaginärteil der drei Grenzwerte bestimmen und andererseits die Grenzwerte numerisch auswerten.

Aufgabe 26:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann ein $x_0 \in (a, b)$, so dass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

gilt. Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `MWS`, welche die folgenden Schritte ausführt:

- Übergabe der Funktion f und zusätzlich der Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ als `tuple`.
- Berechnung von $x_0 \in (a, b)$ und der Tangente g an den Graphen der Funktion im Punkt x_0.
- Zeichnen der Funktion f und der Tangente g über dem Intervall $[a, b]$.
- Rückgabe von x_0, der Tangente g und einem Plot p.

Wenden Sie Ihre Funktion auf $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ und das Intervall $[2, 7]$ an.

Allgemeiner Hinweis: `solveset` findet ggf. nicht alle Lösungen. Das ist für diese Aufgabe jedoch nicht relevant.

Aufgabe 27:

(a) Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `myprimes(n)`, die eine Liste mit allen Primzahlen bis einschließlich n (mit $n \geq 1$) erzeugt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Speichern Sie zunächst alle Zahlen von 2 bis n in einer Liste.
- Wählen Sie das erste Element dieser Liste aus und entfernen Sie alle Vielfache dieser Zahl aus der Liste (z.B. mit `remove`).
- Wiederholen Sie den letzten Schritt für alle übrigen Zahlen in der Liste.

Hinweis: Diesen Algorithmus nennt man auch *Sieb des Eratosthenes*.

(b) Testen Sie `myprimes`, indem Sie alle Primzahlen bis $n = 1$, $n = 19$ und $n = 100$ ausgeben.

(c) Überprüfen Sie mit Hilfe von `myprimes` und des `in`-Operators, ob die Zahlen $263, 571, 4517$ und 9799 Primzahlen sind.

(d) Wenn Sie ihre Funktion für größere n testen, werden Sie feststellen, dass die Berechnung lange dauert. Der Algorithmus ist also nicht effizient. Überlegen Sie sich, ob Schritt 2 wirklich für alle Zahlen und deren Vielfache in der Liste durchgeführt werden muss. Begründen Sie kurz ihre Antwort und verbessern Sie `myprimes` dahingehend.

(e) Schreiben Sie nun eine Funktion `primfaktor(n)`, die eine Liste aller Primfaktoren von n zurückgibt (z. B. `primfaktor(45) = [3, 3, 5]`). Verwenden Sie dazu sinnvoll Ihre Funktion `myprimes`.

(f) Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung von 444, 4620, 665 und 7927.

Aufgabe 28:

(a) Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `ggTpoly`, welche den größten gemeinsamen Teiler zweier Polynome $p, q \in \mathbb{Q}[X]$ berechnet. Verwenden Sie dabei den Euklidischen Algorithmus und verwenden Sie nicht die modulo-Funktion `%`. Normalisieren Sie das Resultat, das heißt der führende Koeffizient soll 1 sein.

(b) Berechnen Sie ggTpoly$(x^6 - 3x^4 - 2x^2 + 8, x^5 + 3x^4 - x^3 - 7x^2 - 2x + 2)$ und ggTpoly$(x^5 + x^3 + 1, x^3 - 1)$.

Hinweis: Die Sympy-Funktion `gcd` darf hierbei nicht verwendet werden. Auf der Homepage finden Sie Implementierungen des Euklidischen Algorithmus für den Ring der ganzen Zahlen.

Besprechung in den Übungen vom 30. November -3. Dezember 2021.