

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13:

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{\cos(3x)}{e^x + 1} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- (a) Bestimmen Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

von f und zeigen Sie, dass dieser mit der Ableitung von f übereinstimmt.

- (b) Zeichnen Sie den Graph der Funktionen f und g für $x \in [-2, 2]$ in verschiedenen Farben in ein Bild. Fügen Sie eine Legende hinzu.
- (c) Definieren Sie $h(x) := f(g(x))$. Bestimmen Sie die erste Ableitung von h mit Hilfe von f , g und deren Ableitungen. Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die Ableitung von h ohne diesen Umweg berechnen.

Verwenden Sie in Teil (c) die Kettenregel für Ableitungen und berechnen Sie die Ableitung für beliebige Funktionen f und g zunächst per Hand auf dem Papier.

Aufgabe 14:

- (a) Schreiben Sie eine Python-Funktion `mycheb(n, x)`, die das n -te Tschebyscheff-Polynom erster Art

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1]$$

berechnet. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der `sympy`-Funktion `chebyshevt(n, x)` für verschiedene Werte von n .

- (b) Zeichnen Sie die ersten fünf Tschebyscheff-Polynome erster Art in ein gemeinsames Bild in unterschiedlichen Farben.

- (c) Schreiben Sie eine Python-Funktion `mylaguerre(n, x)`, die das n -te Laguerre-Polynom

$$L_n(x) := \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

berechnet. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der `sympy`-Funktion `laguerre(n, x)` für verschiedene Werte von n .

Hinweis: In Teil (a) müssen Sie in Ihrer Funktion noch eine Umformung veranlassen, welche die Darstellung von T_n auch tatsächlich in ein Polynom überführt.

b.w.

Aufgabe 15:

Es seien drei Funktionen f , g und h gegeben: $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- (a) Differenzieren Sie mit Hilfe von `sympy` die Funktion

$$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)g(x)h(x).$$

- (b) Sei nun $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Differenzieren Sie mit Hilfe von `sympy` die Funktion

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x f(x-y)g(y) \, dy.$$

Beweisen Sie, dass das Ergebnis richtig ist.

Aufgabe 16:

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 50x^2 + 9x - 45$.

- (a) Erstellen Sie zwei Listen: `liste1` mit den Werten $f(k)$ für $k = -5, \dots, 2$ und `liste2` mit den Werten $f(k)$ für $k = -1, \dots, 7$.
- (b) Wandeln Sie die Listen in zwei Mengen A und B um und bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $A \cup B$ mithilfe eines Befehls. Verwenden Sie die Methode `.union` für Mengen.