Aufgabe 1: (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

und vereinfachen Sie jeweils das Ergebnis.

(b) Berechnen Sie die Hessematrix der Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ ,\ (x, y, z) \mapsto \log\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

und vereinfachen Sie die Hessematrix.

(c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 2x^2\mathrm{e}^x \sin(x)$$

und vereinfachen Sie diese.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \left((x-1)^2 + 1\right)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung, $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, von f.

(b) Zeichnen Sie f, $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ mit unterschiedlichen Farben über dem Intervall $[-2, 4]$ in eine Graphik und fügen Sie eine Legende hinzu.

(c) Bestimmen Sie die Wendepunkte, $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$, von f und geben Sie sie aus. (f hat in x_j einen Wendepunkt, falls $\frac{d^2}{dx^2}f(x_j) = 0$.)

(d) Gesucht ist eine Parabel $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ durch die drei Wendepunkte. Bestimmen Sie dazu a, b und c, sodass $f(x_j) = p(x_j)$ für $j = 0, 1, 2$ gilt.

(e) Zeichnen Sie die Parabel p und die Funktion f mit unterschiedlichen Farben über dem Intervall $[-2, 4]$ in eine Graphik.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Die Parametrisierung einer Kurve in der Ebene ist gegeben durch:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t\cos(t) \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung $\nu(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t)$.

(b) Rotiert man ν um 90° durch Anwendung der Drehmatrix R, so erhält man eine Parametrisieung einer zu γ parallelen Kurve:

$$\mu : t \mapsto \gamma(t) + \frac{1}{\|\nu(t)\|_2} R\nu(t) \quad \text{für } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie jeweils für $t \in [-\pi, \pi]$ die Kurve γ in blau und die Kurve μ in rot in der Ebene.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Im Folgenden wird für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Funktion $r_n : x \mapsto r_n(x)$ definiert.

Es sind zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt gegeben:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = x^2,\ a_n = 2x^2\,(n-2)\,(2n-3) \ \text{ für } n > 2$$
$$b_n = -x^2 + 2\,(n-1)\,(2n-1)\,.$$

Damit werden rekursiv Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$p_0 = 0,\ p_1 = x,\ p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}, \quad q_0 = 1,\ q_1 = 1,\ q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}$$

für $n \geq 2$ definiert. Nun setzt man $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

(a) Schreiben Sie eine Pythonfunktion `pade(n)`, die für eine natürliche Zahl n eine Liste von Sympyausdrücken $[r_0, r_1, \ldots r_n]$ zurückgibt, wobei jedes r_j vereinfacht sein soll.

(b) Zeichnen Sie für $n = 1, \ldots, 5$ die r_n für $x \in [-5, 5]$ in verschiedenen Farben in ein Bild. Beschränken Sie den Wertebereich, die y-Achse, auf $[-5, 5]$.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Extremalstellen (x_0^*, x_1^*) von

$$(x_0, x_1) \mapsto f(x_0, x_1) := x_0\left(4x_0 + \sqrt{2}x_1\right) + x_1\left(\sqrt{2}x_0 + 5x_1\right)$$

unter der Nebenbedingung $x_0^2 - x_1^2 = 1$, die man aus der Forderung erhält, dass die notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllt sind.

(b) Stellen Sie die Nebenbedingung graphisch in einem Bild als rote Linie dar.

(c) Zeichnen Sie für jede mögliche Extremalstelle die Menge

$\{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x_0, x_1) = f(x_0^*, x_1^*) \text{ und } -2 \leq x_0, x_1 \leq 2\}$

in das Bild aus (a) ein.