§ 6 Konvergenz der Eigenvektoren

Annahmen: 1) Approximationseigenschaft ist erfüllt

2) Alle Eigenwerte sind einfach

3) $\rho_{m,h} := \max\limits_{i\neq m} \dfrac{\lambda_m}{|\lambda_{i,h}-\lambda_m|}$ $\qquad$ λ_m m ter Eigenwert

$\lambda_1 < \lambda_2 < \quad \lambda_m < \dots$

$$\rho_{m,h} \to \rho_m := \max_{i\neq m} \frac{\lambda_m}{|\lambda_i-\lambda_m|} \quad \text{für } h \to 0$$

(6.1) <u>Satz</u> Notation wie in § 5

Ist h klein genug, λ_m ein einfacher Eigenwert, so gibt einen Eigenvektor $v_{m,h}$ zum Eigenwert $\lambda_{m,h}$ so, dass

Ritzprojektion

$$\|v_{m,h} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_m}}{w_m}\|_H \le (1+\rho_{m,h})\,\|w_m - R_h w_m\|_H$$

<u>Beweis</u> Sei $w_{m,h}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{m,h}$ mit $\|w_{m,h}\|_H = 1$

(Hilbertbasis aus Eigenvektoren)

$v_{m,h} = (R_h w_m, w_{m,h})\, w_{m,h}$ $\qquad$ Projektion von $R_h w_m$ auf $\operatorname{span}\{w_{m,h}\}$

Skalarprodukt in H $\qquad$ $N = \dim V_h$

ist
$$R_h w_m - v_{m,h} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N} (R_h w_m, w_{i,h})\, w_{i,h}$$

und
$$\|R_h w_m - v_{m,h}\|^2 = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N} (R_h w_m, w_{i,h})^2 \quad (\lozenge)$$
da die $\{w_{i,h}\}_i$ eine ONB sind

Weiter gilt
$$(R_h w_m, w_{i,h}) = \frac{1}{\lambda_{i,h}}\, a(R_h w_m, w_{i,h}) = \frac{1}{\lambda_{i,h}}\, a(w_m, w_{i,h}) = \frac{\lambda_m}{\lambda_{i,h}}\,(w_m, w_{i,h})$$

$$\Rightarrow \quad |(\lambda_{i,h} - \lambda_m)(R_h w_m, w_{i,h})| = |\lambda_m (w_m - R_h w_m, w_{i,h})|$$

und nach Definition $\rho_{m,h} = \max\limits_{i\neq m} \dfrac{\lambda_m}{|\lambda_{i,h}-\lambda_m|}$

$$\Rightarrow \quad |(R_h w_m, w_{i,h})| \le \rho_{m,h}\, |(w_m - R_h w_m, w_{i,h})|$$

Einsetzen in $(\lozenge)$ ergibt

$$\|R_h w_m - v_{m,h}\|^2 \le \rho_{m,h}^2 \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N} (w_m - R_h w_m, w_{i,h})^2$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ w_{i,h} \text{ ONB}}}{\le} \rho_{m,h}^2\, \|w_m - R_h w_m\|_H^2$$

Wurzelziehen

$$\Rightarrow \quad \|R_h w_m - v_{m,h}\| \le \rho_{m,h}\, \|w_m - R_h w_m\|_H$$

Mit $\|v_{m,h} - w_m\|_H \le \|v_{m,h} - R_h w_m\| + \|R_h w_m - w_m\| \le (\rho_{m,h}+1)\,\|R_h w_m - w_m\|$

folgt die Behauptung $\square$

(6.2) Satz

Es gilt

$$\| w_{m,h} - w_m \|_V^2 = \lambda_m \| w_{m,h} - w_m \|_H^2 + (\lambda_{m,h} - \lambda_m)$$

Beweis

$$\| w_{m,h} - w_m \|_V^2 = a(w_{m,h} - w_m, w_{m,h} - w_m)$$

$$= a(w_{m,h}, w_{m,h}) + a(w_m, w_m) - 2a(w_m, w_{m,h})$$

$$= \lambda_{m,h} \underbrace{(w_{m,h}, w_{m,h})}_{=1} + \lambda_m \underbrace{(w_m, w_m)}_{=1} - 2\lambda_m (w_m, w_{m,h})$$

$$= \lambda_{m,h} + \lambda_m - 2\lambda_m (w_m, w_{m,h})$$

Andererseits $\| w_{m,h} - w_m \|_H^2 = \underbrace{\| w_{m,h} \|_H^2}_{=1} + \underbrace{\| w_m \|_H^2}_{=1} - 2(w_m, w_{m,h})$

$$= 2 - \underbrace{2(w_m, w_{m,h})}_{} \qquad | \cdot \lambda_m$$

$$\Rightarrow \| w_{m,h} - w_m \|_V^2 = \lambda_{m,h} + \lambda_m - \lambda_m \left(2 - \| w_{m,h} - w_m \|_H^2\right)$$

$$= \lambda_m \| w_{m,h} - w_m \|_H^2 + \lambda_{m,h} - \lambda_m$$

$\square$

Anwendung auf finiten Elemente

$V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ $\quad V_h$ finite Elemente Raum mit Polynomen bis Grad $\leq k$

so dass

$$\left.\begin{aligned} &\inf_{v_h \in V_h} \left\{ \| v - v_h \|_{0,\Omega} + h \| v - v_h \|_{1,\Omega} \right\} \leq C h^{k+1} | v |_{k+1,\Omega} \\ &\forall\, v \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(6.3) Satz Sei λ_m einfacher Eigenwert und V_h erfülle (1). Sind die ersten m Eigenvektoren w_j $j = 1..m$ Elemente von $H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ so ist

$$\| w_{m,h} - w_m \|_{1,\Omega} \leq C_m h^k$$

Falls das Problem H^2-regulär ist so gilt

$$\| w_{m,h} - w_m \|_{0,\Omega} \leq \hat{C}_m h^{k+1}$$

mit Konstanten C_m und $\hat{C}_m$ unabhängig von h

Beweis Wegen (6.2) und da $\| \; \|_V \sim \| \; \|_{1,\Omega}$ ist

$$\| w_{m,h} - w_m \|_{1,\Omega}^2 \leq C^I \underbrace{\| w_{m,h} - w_m \|_H^2}_{} + C^I \underbrace{(\lambda_{m,h} - \lambda_m)}_{}$$

Mit (6.1)

$$\| w_{m,h} - w_m \|_{0,\Omega}^2 \leq C^{II} \| R_h w_m - w_m \|_{0,\Omega}$$

$$\leq C^{II} \| R_h w_m - w_m \|_{1,\Omega}$$

$$\leq C^{II} \inf_{v_h \in V_h} \| v_h - w_m \|_{1,\Omega} \leq C^{III} h^{k}$$

Nach (5.5) gilt $\lambda_{m,h} - \lambda_m \leq C^{IV} h^{2k}$

$$\Rightarrow \| w_{m,h} - w_m \|_{0,\Omega}^2 \leq C h^{k}$$

Nitsche Trick + (6.1)

$$\| w_{m,h} - w_m \|_{0,\Omega} \leq C^{V} \| R_h w_m - w_m \|_{0,\Omega} \leq C^{VI} \| R_h w_m - w_m \|_{1,\Omega} \cdot h \leq \hat{C} h^{k+1}$$

$\square$