§ 5 Konvergenz der Eigenwerte

Wissen bereits $\lambda_{m,h} \geq \lambda_m$ möchten $\lambda_{m,h} \leq \lambda_m + \varepsilon_m(h)$ mit $\varepsilon_m(h) \to 0$ für $h \to 0$

m : m ter Eigenwert $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ h Gitterweite Parameter für f.E Raum V_h

Annahmen / Voraussetzungen

$$V_h \leq V \leq H \qquad \dim V_h \to \infty \text{ für } h \to 0$$

$\|v\|_V = \|v\|_a$ Norm auf V $\quad \|v\|_V^2 = a(v,v)$

$\|v\|_H$ Norm auf H $\quad (v,v) = \|v\|_H^2$

Approximationseigenschaft : Für alle $v \in V$ ist $\lim\limits_{h\to 0} \inf\limits_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0$

Bemerkung Falls das Problem H^2-regulär ($H = L^2$, $V = H^1$) kann man beweisen dass finite Elementeräume diese Approximationseigenschaft haben $\to$ später

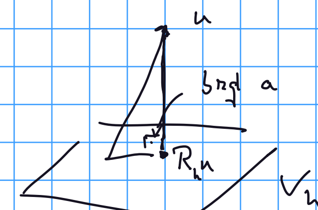
(5.1) Definition (Ritz-Projektion)

Die Ritzprojektion $R_h : V \to V_h$ ist die Orthogonalprojektion bzgl $a(\cdot,\cdot)$, d.h

Für $u \in V$ ist $R_h u \in V_h$ durch

$$a(R_h u, v_h) = a(u, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \left(a(R_h u - u, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \right)$$



definiert

Damit ist $\inf\limits_{v_h \in V} \|u - v_h\|_V = \|u - R_h u\|_V$

Sei $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Hilbertbasis von H aus Eigenvektoren

$\left[\, W_m := \operatorname{span}\{w_1 \dots w_m\} \quad \text{normiert durch } \|w_k\|_H = 1 \,\right]$

Wir definieren $\sigma_{m,h} := \inf\limits_{\substack{w \in W_m \\ \|w\|_H = 1}} \|R_h w\|_H \qquad \varepsilon_{m,h}^2 := \sum_{i=1}^m \inf\limits_{v_h \in V_h} \|w_i - v_h\|_V^2$

Wegen der Approximationseigenschaft gilt $\varepsilon_{m,h} \to 0$ für $h \to 0$

(5.2) Lemma Falls $\sigma_{m,h} > 0$ so ist $\lambda_{m,h} \leq \lambda_m / \sigma_{m,h}^2 \qquad (\lambda_m \leq \lambda_{m,h})$

Beweis : i) Für $V_m := R_h W_m$ ist $\dim V_m = m$

- $\dim V_m \leq m$ da $\dim W_m = m$
- Angenommen $\dim V_m < m$ so gibt es $w \in W_m$ mit $R_h w_m = 0 \Rightarrow \sigma_{m,h} = 0$ ↯

ii) Nach Satz (3.4) ist $\lambda_{m,h} \leq \max\limits_{\substack{v \in V_m \\ v \neq 0}} \rho(v) = \max\limits_{\substack{v \in V_m \\ v \neq 0}} \frac{a(v,v)}{(v,v)}$

und weiter ist

$$\lambda_{m,h} \le \max_{0 \neq w \in W_m} \frac{a(R_h w, R_h w)}{(R_h w, R_h w)} \qquad \cdot \frac{\|w\|_H^2}{\|R_h w\|_H^2}$$

$$= \max_{0 \neq w \in W_m} \frac{a(w,w)}{(R_h w, R_h w)} \le \max_{0 \neq w \in W_m} \frac{a(w,w)}{(w,w)} \cdot \max_{0 \neq w \in W_m} \frac{(w,w)}{(R_h w, R_h w)}$$

$$\le \lambda_m \cdot \frac{1}{\sigma_{m,h}^2} \qquad \square$$

(5.3) <u>Lemma</u> Es gilt $\sigma_{m,h}^2 \ge 1 - \frac{2}{\lambda_1} \varepsilon_{m,h}^2$

<u>Beweis</u> Sei $w \in W_m$ mit $\|w\|_H = 1$ dann gilt $\underline{w = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i}$ mit

$$\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 = 1$$

Es ist
$$1 - \|R_h w\|_H^2 = (w - R_h w, \underbrace{w + R_h w}_{2w + \underbrace{R_h w - w}})$$

$$= -\|w - R_h w\|^2 + 2(w - R_h w, w)$$

$$\Rightarrow \|R_h w\|_H^2 \ge 1 - 2\underbrace{(w - R_h w, w)} \qquad (\#)$$

Weiter gilt
$$(w - R_h w, w) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (w - R_h w, w_i)$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i \, {}^1\!/_{\lambda_i} \, a(w - R_h w, w_i) \qquad w_i \text{ sind Eigenvektoren}$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i \, {}^1\!/_{\lambda_i} \, a(w - R_h w, w_i - \underbrace{R_h w_i}_{\in V_h})$$

da $a(w - R_h w, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$

CSU für $a(\,,\,)$
$$\le \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^m \alpha_i \|w - R_h w\|_V \|w_i - R_h w_i\|_V$$

CSU für euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$
$$\le \frac{1}{\lambda_1} \underbrace{\|w - R_h w\|_V} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2\right)^{1/2}}_{=1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \|w_i - R_h w_i\|_V^2\right)^{1/2}}$$

und
$$\|w - R_h w\|_V = \left\|\sum_{i=1}^m \alpha_i (w_i - R_h w_i)\right\|_V \underset{\Delta\text{-Ungl} + CSU}{\le} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2\right)^{1/2}}_{=1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \|w_i - R_h w_i\|_V^2\right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow (w - R_h w, w) \le \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^m \|w_i - R_h w_i\|_V^2 = \varepsilon_{m,h}^2 / \lambda_1$$

Mit (#) folgt dann die Behauptung $\square$

(5.4) <u>Satz</u> Mit den Voraussetzungen von §3 und §4 und unter der Approximationsannahme gilt

Für $m \ge 1$ gibt es $h_m > 0$ so dass

$$0 \le \lambda_{m,h} - \lambda_m \le 4 \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \varepsilon_{m,h}^2 \qquad \forall\, h \le h_m$$

mit $\varepsilon_{m,h}^2 = \sum_{i=1}^m \inf_{v_h \in V_h} \|w_i - v_h\|_V$

<u>Beweis</u> Aus (5.2) und (5.3) folgt

$$\lambda_{m,h} \overset{(5.2)}{\le} \frac{\lambda_m}{\sigma_{m,h}^2} \overset{(5.3)}{\le} \frac{\lambda_m}{1 - {}^2\!/_{\lambda_1} \varepsilon_{m,h}^2} \le \lambda_m \left(1 + \frac{4}{\lambda_1} \varepsilon_{m,h}^2\right)$$

für ${}^2\!/_{\lambda_1} \varepsilon_{m,h}^2 \le {}^1\!/_2$ (h_m wird so gleich gewählt dass für $h < h_m$ gilt)

(5.5) Lemma

Sei $u \in H^2(\Omega)$ und V_h der Raum der stückweise linearen finiten Elemente. Dann gilt für die Ritzprojektion

$$\| u - R_h u \|_{0,\Omega} \leq c h^2 \, |u|_{2,\Omega}$$
$$\| u - R_h u \|_{1,\Omega} \leq c h \, |u|_{2,\Omega}$$

mit den Konstanten c aus (4.6) und (4.8) aus III

Beweis Da $u \in H^2(\Omega)$ ist $- \sum_{i,j=1}^{d} \partial/\partial x_i \, a_{ij} \, \partial/\partial x_j{}^{ + a_0 \cdot} =: f \in L^2$

und u ist Lösung

$$a(u, v) = (f, v)_{L^2} \quad \forall \, v \in H_0^1(\Omega)$$

Damit ist $R_h u$ die Galerkinapproximation von u in V_h mit (4.6) und (4.8) III folgt die Behauptung $\square$

Da $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt, gibt es zu $u \in H_0^1(\Omega)$ eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^2(\Omega)$ mit $\| u_n - u \|_{1,\Omega} \leq 1/n$

Für jedes n existiert ein h_n so, dass

$$\| \Pi_h u_n - u_n \|_{1,\Omega} \leq c h \, |u|_{2,\Omega} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für } h \leq h_n$$

Interpolationsoperator

$$\Rightarrow \| \Pi_h u_n - u \|_{1,\Omega} \leq \| \Pi_h u_n - u_n \|_{1,\Omega} + \| u_n - u \|_{1,\Omega} \leq \frac{2}{n} \quad \text{für } h < h_n$$

Die Approximationsannahme ist dann wegen der Äquivalenz der $\underbrace{\| \; \|_V}_{= \| \; \|_a}$ und $\| \; \|_{1,\Omega}$ erfüllt

(5.6) Bemerkung

Die Abschätzung aus (5.4) kann man für finite Elemente höherer Ordnung und "glatte" Eigenvektoren verbessern:

Sind $w_1, \dots, w_m \in H^{k+1}(\Omega)$ und gilt

$$\inf_{v_h \in V_h} \| v - v_h \|_{k+1,\Omega} \leq C \, |v|_{k+1,\Omega} \quad \forall \, v \in H^{k+1}(\Omega)$$

so ist $$0 \leq \lambda_{m,h} - \lambda_m \leq C h^{2k} \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{m} |w_i|^2_{k+1,\Omega}$$

wobei V_h ein finiter Elementeraum mit Polynomen bis Grad k ist.