

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 34:

Zeigen Sie:

- (a) Ist $T : V \rightarrow W$ ein linearer, beschränkter Operator und $\dim(\text{im}(T)) < \infty$, so ist T kompakt.
(b) Ist Ω beschränkt, stückweise C^1 -berandet und \mathcal{T}_n eine Triangulierung von Ω . Dann ist

$$T_n : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), v|_{K_i} \mapsto M_{K_i}(v)$$

kompakt. Dabei seien $\{K_i \mid i \in I_n\} = \mathcal{T}_n$ die Dreiecke der Triangulierung und M_{K_i} der Mittelwert-Operator aus Lemma (4.1).

Aufgabe 35:

Zeigen Sie, dass für jede Triangulierung eines einfach zusammenhängenden Gebietes im \mathbb{R}^2 gilt:

$$\text{Anzahl der Dreiecke plus Anzahl der Eckpunkte minus Anzahl der Kanten} = 1.$$

Warum gilt dies nicht, falls das Gebiet lediglich zusammenhängend ist?

Aufgabe 36:

Sei $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1, x < 0 \text{ oder } 0 < y \} \subseteq \mathbb{R}^2 \hat{=} \mathbb{C}$.

Überlegen Sie sich, dass $u(x, y) \hat{=} u(x + iy) = \text{Im}(w(z)) = \text{Im}(z^{2/3})$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(e^{i\varphi}) = \sin(\frac{2}{3}\varphi), & \varphi \in [0, \frac{3}{2}\pi] \\ u = 0 & \text{sonst auf } \partial\Omega \end{cases}$$

erfüllt. Zeigen Sie weiterhin, dass ∇u auf Ω nicht beschränkt ist.

Aufgabe 37:

- (a) Erweitern Sie die Implementierung von Aufgabe 22 (b) (die Musterlösung ist auf der Homepage) um eine Schleife, in der der Fehler in der L_2 - und der H_1 -Norm berechnet wird und das Gitter nach jedem Durchlauf gleichmäßig verfeinert wird, in dem Sie den Befehl `mesh.Refine()` verwenden. Für das erste Gitter soll hierbei `maxh=0.8` gesetzt werden, es sollte auch nicht mehr als viermal verfeinert werden. Vergleichen Sie jeweils in beiden Normen den Fehler bzgl. eines Gitters mit dem bzgl. des nächstfeineren Gitters.
Lassen Sie die Schleife auch mit Finiten Elementen höherer Ordnung durchlaufen.
- (b) Wenden Sie das gleiche Vorgehen auf das Beispiel aus Aufgabe 36 an, gehen Sie dazu wie folgt vor:
- (i) Konstruieren Sie das Gebiet Ω . Achten Sie hierbei auf die Zerlegung von $\partial\Omega$ in Γ_1 und Γ_2 entsprechend den Randbedingungen, vgl. `Aufg22_Omega.py` auf der Homepage.
 - (ii) Verändern Sie Ihre Implementierung von Teil (a) nun so, dass jetzt das Randwertproblem aus Aufgabe 36 gelöst wird. Auf der Homepage finden Sie dazu eine Python-Datei mit der Funktion `arg(x,y)`, die für die Polarkoordinaten-Darstellung der NGSOLVE - *CoefficientFunctions* `x` und `y` den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ ausgibt.
 - (iii) Verändern Sie die Ordnung der Finiten Elemente und vergleichen Sie die Fehler. Was fällt Ihnen auf?

Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

**Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 12.01.2021, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.**