Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

15. Dezember 2020

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 30:

Triangulieren Sie das Gebiet aus Abbildung 1.

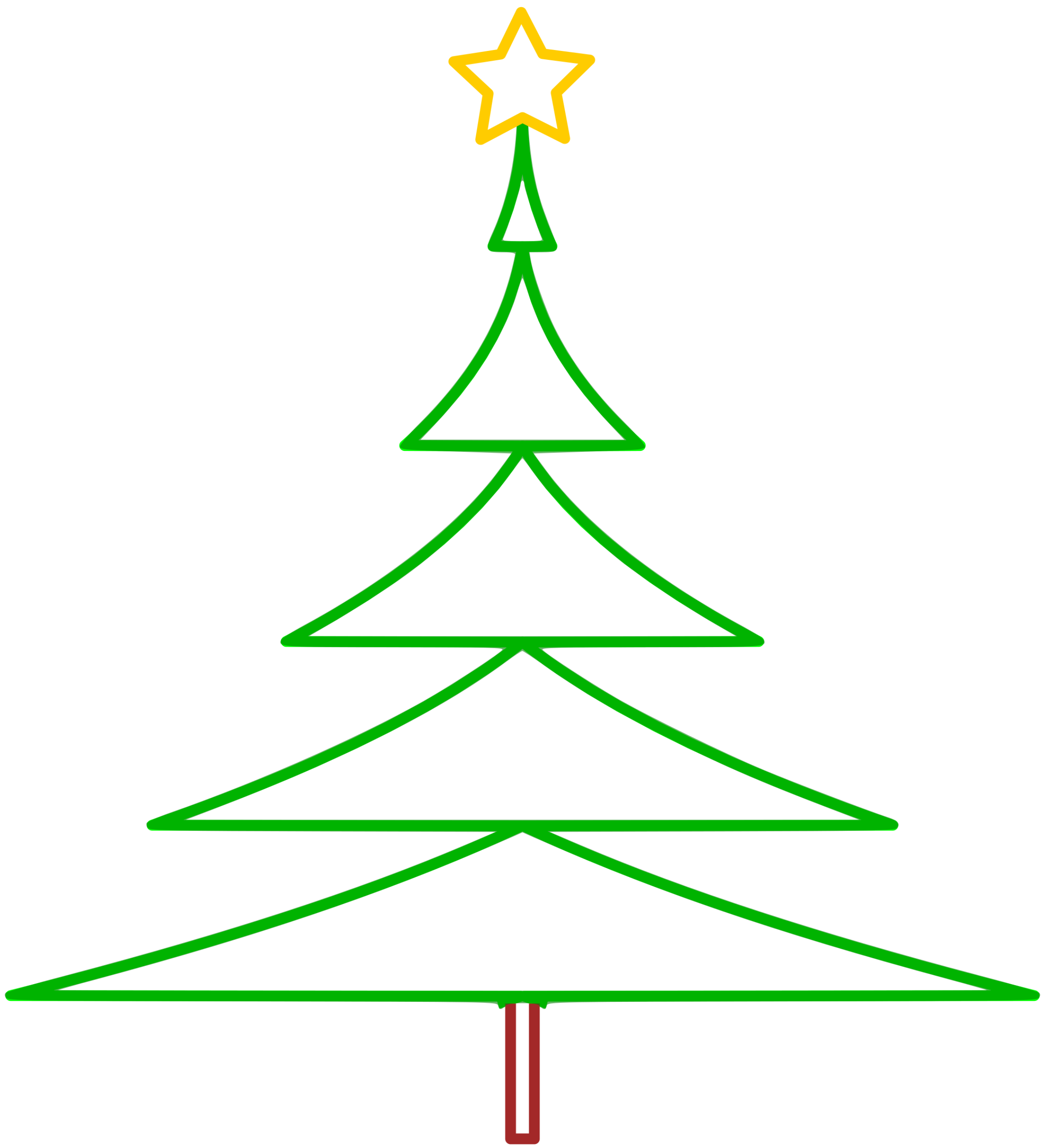

Abbildung 1: Gebiet Ω

b.w.

Aufgabe 31:

Sei $I = [a,b]$, $a < b$, ein reelles Intervall. Die Vorschrift $u \mapsto \omega_I(u) := \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ definiert ein Funktional ω_I auf $L^1(I)$. Wie üblich sei N_x die Punktauswertung an der Stelle x (definiert für stetige Funktionen).

(a) Zeigen Sie, dass $(I,\ \mathbb{P}_2(I),\ \Sigma)$ ein finites Element ist, falls $\Sigma = \{N_a,\ N_b,\ \omega_I\}$. Bestimmen Sie die nodale Basis von $\mathbb{P}_2(I)$.

(b) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{N_a,\ \omega_I\}$. Zeigen Sie, dass $(I,\ \mathbb{P}_1(I),\ \widetilde{\Sigma})$ ein finites Element ist. Wieso ist das Tripel $(I,\ \mathbb{P}_1(I),\ \widetilde{\widetilde{\Sigma}})$ mit $\widetilde{\widetilde{\Sigma}} = \{N_{(a+b)/2},\ \omega_I\}$ kein finites Element?

(c) Seien nun $\hat{I} = [0,1]$ und $\widehat{\Sigma} = \{\omega_{[0,2/3]},\ \omega_{[1/3,1]}\}$. Ist $(\hat{I},\ \mathbb{P}_1(\hat{I}),\ \widehat{\Sigma})$ ein finites Element?

Aufgabe 32:

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Operator

$$L\ :\ H^1(\widehat{K}) \longrightarrow L^2(\widehat{K}), \quad v \longmapsto \int_0^1 v(t,0)\,\mathrm{d}t$$

ein linearer, stetiger Operator ist.

Aufgabe 33:

Beweisen Sie Lemma (4.5), d.h. zeigen Sie:

Unter den Voraussetzungen von Lemma (4.3) und falls $h/\rho <$ const. ist, gilt

$$\|v - \Pi v\|_{0,K} \leq C h^2 |v|_{2,K} \qquad \forall v \in H^2(K).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für das Referenzdreieck. Leiten Sie dann daraus die allgemeingültige Abschätzung her.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 22.12.2020, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.